

## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

#### Méthode de type sous-gradients pour les problèmes de minimax

Hibo, Anne-Marie; Rahier, Anne-Geneviève

*Award date:*  
1978

*Awarding institution:*  
Université de Namur

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

FACULTES UNIVERSITAIRES N.D. DE LA PAIX

NAMUR

FACULTE DES SCIENCES

Année académique 1977-1978

METHODE DE TYPE SOUS-GRADIENTS

POUR LES PROBLEMES DE MINIMAX

Mémoire présenté pour l'obtention du grade  
de Licencié en Sciences  
mathématiques  
par

Promoteur

NGUYEN VAN HIEN

Anne-Marie HIBO  
Anne-Geneviève RAHIER



Nous remercions Monsieur Nguyen Van Hien  
et Jean-Jacques Strodiot pour leur aide et  
leurs encouragements qui nous ont permis  
de mener à bien ce mémoire.

Anne-Marie Hibo

Anne-Geneviève Rahier

## TABLE DES MATIERES

### Introduction

### Remarques préliminaires

### Chapitre I. Position du problème - Interprétation dans des applications

I.1. Problèmes de localisation	1.
I.2. Applications pratiques	3.

### Chapitre II. Concepts de base en optimisation convexe

II.1. Fonctions convexes	6.
II.2. Dérivées directionnelles et sous-gradients	11.
II.3. Direction de descente	18.
II.4. Approches du problème	20.

### Chapitre III. Introduction à l'adaptation de l'algorithme de Dem'yanov par Chatelon, Hearn et Lowe

III.1. Hypothèses d'application de l'algorithme	35.
III.2. Agrandissement du sous-différentiel classique	38.
III.2.1. L'ensemble des indices actifs	38.
III.2.2. L'ensemble des points de non différentiabilité dans un voisinage	39.
III.2.3. L'ensemble des sous-gradients	39.
III.3. Propriétés du sous-différentiel élargi	45.
III.4. Caractérisation de la direction de descente	47.
III.4.1. Borne sur la valeur optimale de la fonction	53.
III.4.2. Existence d'une direction de descente	60.

## Chapitre IV. Algorithme et convergence

IV.1. Algorithme de Dem'yanov modifié par Chatelon, Hearn et Lowe	62.
IV.2. Preuve de la convergence de l'algorithme	63.

## Chapitre V. Application de l'algorithme

V.1. Mise au point du programme	75.
V.2. Description détaillée du programme et de ses sous-routines	84.
V.3. Texte FORTRAN du programme exécutant l'algorithme	99.
V.4. Résultats numériques	120.
V.4.1. Problèmes minimax de localisation	120.
V.4.2. Problèmes minisomme de localisation	122.
V.4.3. Problèmes d'approximation	124.
V.4.4. Conclusions de l'implémentation	124.

Bibliographie	134.
---------------	------

## INTRODUCTION

Notre travail étudie le problème de minimisation

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max \{ f_i(x) : i=1,2,\dots,p \} \quad \text{où} \quad f_i(x) = \sum_{j=1}^1 f_{ij}(x)$$

Les fonctions  $f_{ij}$  sont convexes propres et non différentiables.

Ce problème est résolu à l'aide d'un algorithme de sous-gradients élaboré par J. Chatelon, D.W. Hearn et T.J. Lowe [1]. La première partie de ce mémoire présente l'étude théorique de la convergence de l'algorithme tandis que la seconde partie est consacrée à l'exécution sur ordinateur de cet algorithme.

Au chapitre I, nous nous intéressons à des applications immédiates de cette méthode dans des problèmes de localisation sans contraintes c'est-à-dire lorsque les fonctions  $f_i$  sont des normes  $l_p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ . Par leur interprétation dans le domaine économique notamment, nous montrons leurs applications concrètes.

Dans le chapitre II, les résultats de l'analyse convexe suggèrent d'étendre la méthode de plus grande descente de Cauchy aux fonctions non différentiables. Cependant cet algorithme ne converge alors pas nécessairement. C'est pourquoi nous citons certaines autres méthodes de résolution ainsi que leurs inconvénients d'application. Pour traiter le cas où les fonctions  $f_i$  sont continûment différentiables, Dem'yanov et Malozemov [4] introduisent un nouveau sous-différentiel

$$L_\epsilon(x) = \text{Co} \left( \bigcup \{ \nabla f_i(x) : i \in I_\epsilon(x) \} \right)$$

$$\text{où} \quad I_\epsilon(x) = \{ i : F(x) - f_i(x) \leq \epsilon F(x) \}$$

$$\text{et} \quad F(x) = \max \{ f_i(x) : i=1,2,\dots,p \}$$

Lorsque la fonction objective est le maximum de fonctions convexes et non nécessairement différentiables, J. Chatelon, D.W. Hearn et T.J. Lowe proposent une modification supplémentaire dans le sous-différentiel classique. Au sous-différentiel de Dem'yanov et Malozemov, s'ajoutent les sous-gradients déterminés par les points de non différentiabilité des fonctions  $f_i$  dans un voisinage du point considéré.

Au chapitre III, étant donné que le calcul du sous-différentiel élargi exige la connaissance de tous les sous-gradients, des hypothèses supplémentaires sont introduites sur les fonctions auxquelles s'applique l'algorithme ; elles doivent être LFS c'est-à-dire que le nombre de sous-différentiels distincts associés aux points de non différentiabilité de chacune des fonctions  $f_{ij}$  est fini sur tout ensemble borné. Ces hypothèses permettent de définir l'élargissement du sous-différentiel classique, en tenant compte des fonctions  $f_i$  proches de la fonction objective  $\max_i f_i(x)$  ainsi que des points de non différentiabilité des fonctions  $f_i$  au voisinage de chaque itérée. Cet élargissement est justifié par les propriétés qu'il possède. Nous pouvons en déduire une estimation de la valeur optimale de la fonction objective. A partir de la condition nécessaire et suffisante d'optimalité, nous montrons l'opportunité du choix de la direction de descente dans le sous-différentiel élargi, par l'intermédiaire d'une fonction auxiliaire.

Dans le chapitre IV, nous détaillons l'algorithme de J. Chatelon, D. W. Hearn et T. J. Lowe et présentons la démonstration de la convergence de la suite générée par l'algorithme, vers une valeur d'adhérence qui répond à la définition de stationnarité.

Le chapitre V est consacré à l'étude détaillée de l'implémentation sur ordinateur de cet algorithme ainsi qu'aux résultats numériques.



Au terme de cette étude, il apparaît qu'une estimation suffisamment précise de la valeur minimale d'une fonction de type  $\max \{ f_i(x) : i=1,2,\dots,p \}$ , où les fonctions  $f_i$  ne sont pas nécessairement partout différentiables, puisse être atteinte moyennant un ajustement par réductions successives des paramètres d'élargissement du sous-différentiel classique, et cela en dépit du caractère arbitraire de cette adaptation des paramètres, en cours d'exécution de l'algorithme.

## REMARQUES PRELIMINAIRES

Ce paragraphe est le relevé des notations que nous utilisons.

Nous notons  $R^n$  l'espace euclidien de dimension  $n$  dans lequel  $\|x\|_p$  désigne la norme  $l_p$  de l'élément  $x$  de  $R^n$ . En particulier,  $\|x\|$  désigne la norme  $l_2$ .

De plus,  $\|x-y\|_q^{(q)}$  signifie que nous considérons la norme  $l_q$  de  $x-y$  ou celle-ci élevée à la puissance  $q$ , c'est-à-dire soit  $\|x-y\|_q$   
soit  $\|x-y\|_q^q$

Autrement dit, le raisonnement fait à ce moment-là est valable à la fois pour  $\|x-y\|_q$  et  $\|x-y\|_q^q$ .

Etant donné un point  $x$  de  $R^n$ , nous notons la boule euclidienne centrée en  $x$  et de rayon  $\eta$  par  $B(x, \eta)$ .

Dans le cas où  $x$  est l'origine et le rayon l'unité, c'est-à-dire  $x=0$  et  $\eta=1$ ,  $B(0,1)$  désigne la boule euclidienne unité et est notée  $B$ .

Le produit scalaire euclidien de 2 éléments  $x$  et  $y$  de  $R^n$  sera noté par  $\langle x, y \rangle$ .

Si  $F$  est une fonction définie sur  $R^n$ , la dérivée directionnelle de  $F$  au point  $x$  dans la direction  $y$  est notée  $F'(x; y)$  et le sous-différentiel de  $F$  au point  $x$ ,  $\partial F(x)$ .

Si en particulier,  $F$  est une fonction différentiable au point  $x$  de  $R^n$ , le gradient de la fonction  $F$  au point  $x$  de  $R^n$  est noté  $\nabla F(x)$ .

Nous désignons par  $Co(S)$  l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble  $S$  de  $R^n$ .

$Nr(S)$  désigne l'élément de norme  $l_2$  minimale dans  $S$ , quand  $S$  est convexe et fermé.

Etant donné une fonction  $F$  définie sur une partie  $S$  de  $R^n$ , nous écrivons  $\partial F(S)$  pour  $\cup \{ \partial F(x) : x \in S \}$ .

Une énumération  $i=1,2,\dots,p$  est notée plus simplement par  $i \in \bar{p}$ .

Si  $a$  est un nombre réel,  $|a|$  désigne sa valeur absolue.

L'abréviation LFS signifie Locally Finitely Subdifferentiable.

Etant donné un élément  $x$  et un sous-ensemble  $S$  de  $R^n$ , le symbole  $x \underset{\sim}{\in} S$  signifie que le point  $x$  de  $R^n$  appartient "presque" au sous-ensemble  $S$ , autrement dit, il lui est extrêmement "proche".



## CHAPITRE I

POSITION DU PROBLEME  
 INTERPRETATION DANS DES APPLICATIONS

### I.1. Problèmes de localisation

Le problème de localisation considéré revient à un problème de minimisation sans contraintes dans lequel la fonction objective a une forme particulière. Son but premier est de rechercher la position d'un certain nombre de points de  $R^2$  à situer parmi d'autres points fixés dans le plan réel. Cette localisation se fait à travers la minimisation d'une fonction objective qui traduit les caractères que devront posséder les nouveaux points à situer.

Dans notre cas, l'objectif consiste à minimiser, dans le plan réel, les distances maximales pondérées entre les différents points fixes et ceux à situer. Par conséquent, la forme générale du problème est

$$\min_{x \in R^{2N}} \max_{\substack{i=1,2,\dots,M \\ j,k=1,2,\dots,N}} (w_{ji} \|x_j - a_i\|_{p_{ji}}^{(p_{ji})}, v_{jk} \|x_j - x_k\|_{q_{jk}}^{(q_{jk})})$$

où  $x=(x_1, x_2, \dots, x_N)$  avec  $x_j \in R^2$

\*\* les  $a_i$  sont des éléments de  $R^2$ . Ils donnent la position de M points fixés.

\*\* les  $x_j$  ou  $x_k$  sont des éléments de  $R^2$ . Ce sont les positions des N nouveaux points à situer.

\*\* les  $w_{ji}$  sont des nombres réels. Ce sont des poids non négatifs représentant l'importance relative des nouveaux points à situer  $x_j$  par rapport aux points fixes existants  $a_i$ . C'est en quelque sorte leur interaction mutuelle.

\*\* les  $v_{jk}$  sont des nombres réels. Ce sont des poids non négatifs représentant l'importance relative des nouveaux points à situer  $x_j$  et  $x_k$ , entre eux, c'est-à-dire l'importance de leur interaction mutuelle.

De façon générale, ce problème pourra s'écrire

$$\min \left\{ F(x) : x \in \mathbb{R}^n \right\} \quad \text{où} \quad F(x) = \max \left\{ f_i(x) : i=1,2,\dots,p \right\}$$

où, dans notre cas, chaque fonction  $f_i$  est une norme  $l_p$ .

Chaque fonction  $f_i$  est donc convexe mais non nécessairement partout différentiable et, par conséquent,  $F$  est aussi une fonction convexe puisque maximum de fonctions convexes.

Nous nous intéresserons à deux types de fonctions  $f_i$ .

Tout d'abord celles de la forme  $w_{ji} \|x_j - a_i\|_{p_{ji}}^{(p_{ji})}$ , qui n'est autre que la distance pondérée entre les points fixés  $a_i$  et les nouveaux points à situer  $x_j$ , et d'autre part celles de la forme  $v_{jk} \|x_j - x_k\|_{q_{jk}}^{(q_{jk})}$ , qui est la distance pondérée entre les nouveaux points à situer.

Remarquons que le fait de considérer la fonction  $\|\cdot - \cdot\|_q^q$  au lieu de  $\|\cdot - \cdot\|_q$  n'influence en aucune façon la localisation du point  $x$  de  $\mathbb{R}^{2N}$ .

On aura reconnu ainsi la forme générale d'un problème de minimax. Or les fonctions dont on prend le maximum sont différentiables pour tout  $q > 1$ , ainsi les seuls points de non différentiabilité sont ceux engendrés par la maximisation. Par contre, dans le cas de la norme  $q = 1$ , c'est-à-dire lorsqu'on considère la distance rectangulaire, il faudra tenir compte de certains points de non différentiabilité supplémentaires qui proviennent du fait que la distance rectangulaire contient des termes en valeur absolue. Cette fonction n'est donc pas partout différentiable.

L'algorithme étudié au chapitre IV a été élaboré dans le but de pallier cette difficulté supplémentaire. Cet algorithme de sous-gradients est inspiré de Dem'yanov et Malozemov [4] mais a été modifié par J. Chatelon, D. W. Hearn et T. J. Lowe. Les modifications apportées à la méthode initiale de Dem'yanov ont permis de prouver la convergence de ce nouvel algorithme vers un point  $\epsilon$ -optimal.

Notons que le problème possède de nombreuses applications pratiques puisque, par le fait de travailler dans l'espace réel  $\mathbb{R}^{2N}$ , le problème revient à localiser  $N$  points dans un plan de dimension 2.

## I.2. Applications pratiques

Les domaines d'application de cette théorie sont multiples. Voici brièvement trois exemples concrets.

Le premier exemple a été tiré de [ 5 ] .

Considérons une zone délimitée dans laquelle se déroule des combats, ce sera le domaine dans lequel nous travaillerons.

Un premier problème est celui de localiser de nouveaux moyens de communication, en l'occurrence, des radars qui doivent couvrir toute la région délimitée. Nous connaissons déjà les positions des aéroports dans cette région, ce sont les  $a_i$ . Nous devons déterminer les emplacements des radars, ce sont les  $x_j$ . Chaque radar  $x_j$  doit être suffisamment près de certains aéroports  $a_i$  pour pouvoir contrôler leur trafic aérien. De plus, les radars  $x_j$  doivent être proches d'autres radars  $x_k$  pour coordonner les communications aériennes à travers toute la région. Mais chaque aéroport  $a_i$  peut être couvert par plusieurs radars  $x_j$ , pour renforcer la défense. Puisque les radars communiquent entre eux en ligne droite, la distance euclidienne s'impose.

Une seconde partie du problème consiste à localiser des centres médicaux de premiers secours dans la zone de combat. Ces centres doivent être capables de couvrir toute la zone considérée. Il est également indispensable qu'ils ne soient pas trop éloignés les uns des autres car, en cas d'urgence, ils doivent pouvoir recourir à l'équipement d'un centre voisin. De plus, nous supposons que les déplacements entre les différents centres sont effectués par hélicoptère. La distance euclidienne s'impose donc à nouveau.

Quant aux poids, ils seront déterminés suivant des facteurs tels que l'intensité des combats, le nombre d'hommes dans la région,...

Cet exemple apparaît comme parfaitement décrit par la forme générale du problème proposée dans le paragraphe précédent.



Intéressons-nous à présent à une application économique. Explicitons un problème de population cité dans [7].

Supposons  $n$  cités dont l'importance des populations respectives est donnée par les poids  $w_j$ ,  $j=1,2,\dots,n$ .

Connaître le point  $x$  pour lequel la somme des distances à chacune de ces cités pondérées par leur population respective, est minimum, sera utile dans bien des circonstances. En effet, ce point  $x$  est en quelque sorte un point focal pour toute la population de la région comprenant ces  $n$  cités. Nous pouvons l'interpréter de diverses manières.

Considérons  $n$  quartiers d'une grande ville où nous désirons implanter un centre commercial. A chaque quartier est attachée une concentration de population. Nous supposons que l'attraction de ce centre commercial sur chacun des quartiers varie directement avec la densité de concentration de la population et inversement avec la distance. Il est évident que dans ce cas, le point  $x$  que nous venons de caractériser, sera le point où l'attraction de ce centre commercial sur la population sera maximale.

Les poids  $w_j$  peuvent également être interprétés non seulement comme l'importance numérique de la population dans chacun des quartiers mais aussi en tant que variables reflétant d'autres données importantes du point de vue économique : par exemple, le revenu des habitants, le nombre d'enfants, le nombre d'automobiles,...

Nous nous sommes attardées plus spécialement à l'exemple exposé dans [1].

Ce problème consiste en la localisation de deux bateaux dans la mer des Caraïbes. Leur position doit être fonction de deux données particulières. Premièrement, les navires doivent être prêts à intervenir en cas de troubles, en neuf points stratégiques fixés en neuf cités parmi les îles des Caraïbes. D'autre part, des communications sont nécessaires entre les bateaux ; par conséquent, il faut prendre en considération leur distance mutuelle. Les probabilités avec lesquelles peuvent surgir des troubles dans les cités, sont considérées comme les facteurs de poids.

Nous utiliserons les distances définies par les normes  $l_p$  où  $p \in [1,2]$ .

En effet, la distance entre certaines villes et un bateau est une distance euclidienne car considérée en ligne droite par la mer. Pour d'autres, par contre, étant donné les nombreuses îles de la mer des Caraïbes, si un bateau est du côté opposé de l'île par rapport à la ville, nous devons modifier le choix de la distance.

Les positions géographiques des villes sont connues, ce sont les  $a_i$ , pour  $i=1,2,\dots,9$ . Les navires sont représentés par les points  $x_1$  et  $x_2$ .

Formulons le problème

$$\min_{\substack{x_1 \in \mathbb{R}^2 \\ x_2 \in \mathbb{R}^2}} \left\{ \max_{i=1,2,\dots,9} (w_{1i} \|x_1 - a_i\|_{p_{1i}}, w_{2i} \|x_2 - a_i\|_{p_{2i}}, \|x_1 - x_2\|_2) \right\}$$

Nous reprendrons cet exemple pour le résoudre par l'algorithme de Dem'yanov modifié, lorsque nous aurons établi la convergence de cette méthode de sous-gradients.

## CHAPITRE II

CONCEPTS DE BASE  
 EN OPTIMISATION CONVEXE

Nous allons reprendre quelques définitions et théorèmes fondamentaux concernant les fonctions convexes afin de préciser le cadre de notre travail.

### II.1. Fonctions convexes

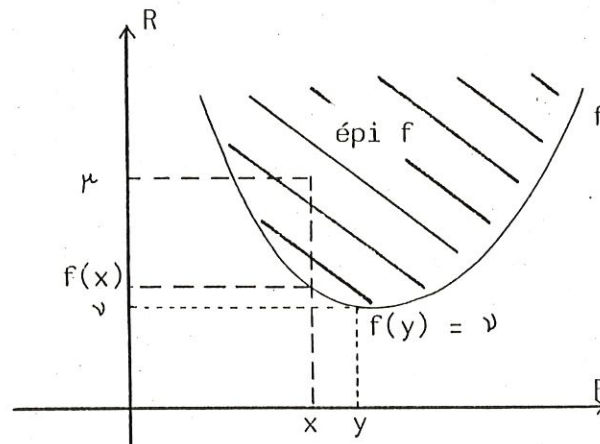
Nous considérons une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles ( ou  $\pm \infty$  ).

L'ensemble  $\text{épi } f = \left\{ (x, \mu) : f(x) \leq \mu \text{ où } x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R} \right\}$  est appelé *épigraphe* de la fonction  $f$ .

Illustrons cette définition par un exemple.

soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$

fig. 1



l'épigraphe de  $f$  est la partie hachurée dans la figure 1.

Un sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit *convexe* si  $(1-\lambda)x + \lambda y$  est un élément de  $S$ , lorsque  $x$  et  $y$  sont des éléments de  $S$  et  $\lambda$  un scalaire compris entre 0 et 1 .

Donc si  $x$  et  $y$  sont deux éléments quelconques de l'ensemble  $S$ , le segment qui les joint c'est-à-dire  $\{z : z = (1-\lambda)x + \lambda y \text{ où } 0 \leq \lambda \leq 1\}$  est inclus dans l'ensemble  $S$ .

Nous pouvons illustrer cette définition de la manière suivante

fig. 2

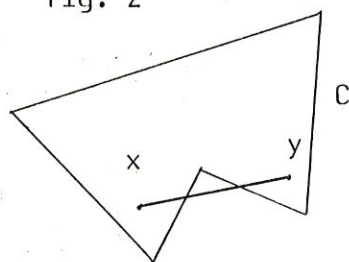
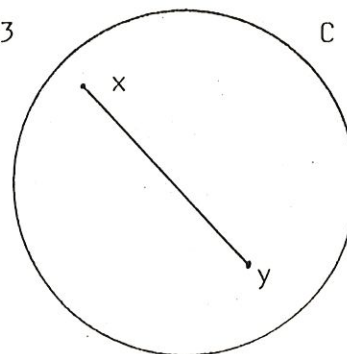


fig. 3

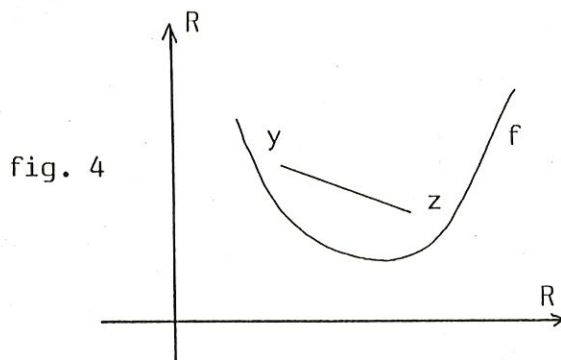


\*\* dans la figure 2,  $C$  n'est pas un ensemble convexe car le segment qui joint  $x$  et  $y$  n'est pas complètement inclus dans  $C$ .

\*\* dans la figure 3,  $C$  est un ensemble convexe car, pour deux éléments quelconques  $x$  et  $y$  de  $C$ , le segment qui les joint est entièrement inclus dans  $C$ .

Nous dirons que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  est convexe lorsque l'ensemble épi  $f$  est un sous-ensemble convexe de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Reprenons l'exemple présenté lors de la définition de l'épigraphe d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Cette fonction  $f$  est convexe car son épigraphe est convexe.

Nous dirons que la fonction convexe  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}^n$ , à valeurs dans  $[-\infty, +\infty]$  est propre si  $f(x) < +\infty$  pour au moins un élément  $x$  et si  $f(x) > -\infty$  pour tout  $x$ .



Dans la suite, nous considérerons des fonctions convexes, définies sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , donc des fonctions convexes propres.

Le théorème suivant peut également définir une fonction convexe.

#### Théorème II.1

Si  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles, alors  $f$  est convexe si et seulement si

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad \text{où } 0 \leq \lambda \leq 1$$

pour tout  $x$  et pour tout  $y$ , tous deux éléments de  $\mathbb{R}^n$ .

#### démonstration

■ Démontrons la condition nécessaire.

Par hypothèse, la fonction  $f$  est convexe.

Par définition, l'épigraphe de  $f$  est donc convexe, c'est-à-dire si nous considérons  $(x, f(x))$  et  $(y, f(y))$ , deux éléments de l'épigraphe de  $f$ , leur combinaison convexe est un élément de l'épigraphe de  $f$ , donc pour tout  $\lambda$  tel que  $0 \leq \lambda \leq 1$ , le point  $((1-\lambda)x + \lambda y, (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y))$  est élément de l'épigraphe de  $f$ .

Par la définition de l'épigraphe d'une fonction,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

pour tout  $\lambda$  tel que  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Ceci démontre la condition nécessaire.

Etablissons à présent la condition suffisante.

Par hypothèse, nous savons que

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (1)$$

pour tout  $\lambda$  tel que  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Nous voulons démontrer que la fonction  $f$  est convexe,

c'est-à-dire, par définition, que son épigraphe est convexe.

Soient  $(x, \mu)$  et  $(y, \nu)$  deux éléments de l'épigraphe de la fonction  $f$  donc  $f(x) \leq \mu$  et  $f(y) \leq \nu$

Dès lors, nous déduisons de l'assertion (1)

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\mu + \lambda \nu$$

pour tout  $\lambda$  tel que  $0 \leq \lambda \leq 1$ .



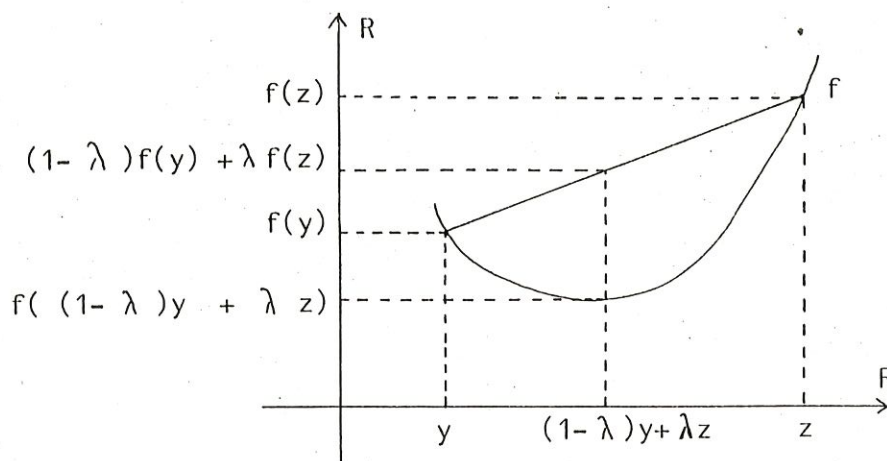
et par définition de l'épigraphe de  $f$

$((1-\lambda)x + \lambda y, (1-\lambda)\mu + \lambda \nu)$  est élément de l'épigraphe de  $f$ ,  
 c'est-à-dire  $(1-\lambda)(x, \mu) + \lambda(y, \nu)$  est élément de l'épigraphe de  $f$ ,  
 donc l'épigraphe de  $f$  est un ensemble convexe  
 et la condition suffisante est démontrée  
 puisque, si l'épigraphe d'une fonction est un ensemble convexe, par définition,  
 cette fonction est convexe. ■

Cette seconde définition d'une fonction convexe s'applique de la manière suivante

soit une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

fig. 5



la portion de la courbe dont l'abscisse se situe entre  $y$  et  $z$  est en-dessous de la corde joignant  $f(y)$  et  $f(z)$ .

### Théorème II.2

Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions convexes définies sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles, alors leur somme  $f+g$  est une fonction convexe.

### démonstration

■  $f$  est une fonction convexe, donc par le théorème II.1,  
 pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$  et pour tout  $\lambda$  dans  $[0,1]$

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

De même, nous avons pour  $g$

$$g((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)$$

pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$  et pour tout  $\lambda$  dans  $[0,1]$

En sommant les deux inégalités, nous obtenons

$$(f+g)((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)(f+g)(x) + \lambda (f+g)(y)$$

pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$  et pour tout  $\lambda$  dans  $[0,1]$

donc  $f+g$  est une fonction convexe. ■

En appliquant ce théorème II.2,

la combinaison linéaire, à coefficients positifs,  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$  de  $n$  fonctions convexes propres est une fonction convexe propre.

### Théorème II.3

*Le suprénum, tracé point par point, d'une collection arbitraire de fonctions convexes est convexe.*

#### démonstration

■ Soit une fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sup \{ f_i(x) : i \in I \}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

L'épigraphe de cette fonction  $f$  est l'intersection des épigraphes des fonctions  $f_i$ . Mais comme les fonctions  $f_i$  sont convexes, leur épigraphe est convexe.

De plus l'intersection arbitraire d'ensembles convexes est convexe [12, p.10].

Donc l'épigraphe de  $f$  est convexe, c'est-à-dire que la fonction  $f$  est convexe. ■

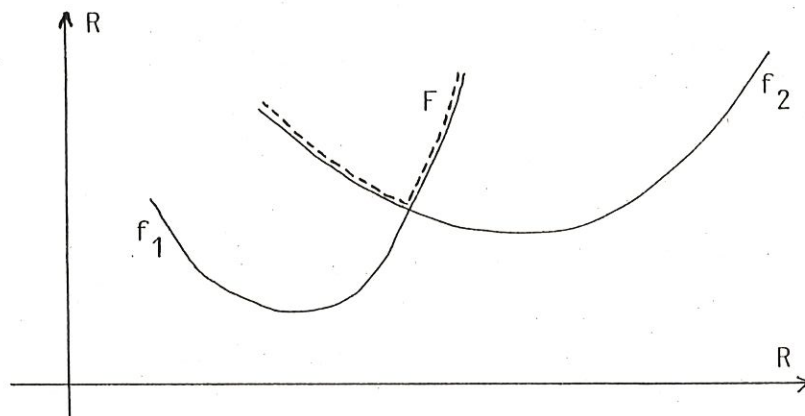
Dans ce travail, nous allons étudier des problèmes de type minimax ; la fonction à minimiser sera en effet de la forme

$$F(x) = \max \{ f_i(x) : i \in I \}$$

Le théorème II.3 assure donc la convexité de la fonction  $F$  étant donné que les fonctions  $f_i$  sont convexes, par hypothèse.

Considérons l'exemple suivant  $F(x) = \max \{ f_i(x) : i=1,2 \}$   
et traçons le graphe de  $F$

fig. 6



le résultat  $F(x)$  est représenté en pointillé dans la figure 6.

#### Théorème II.4

Une fonction convexe définie sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles est continue.

#### démonstration

[ 12, p.82-83 ]

### II.2. Dérivées directionnelles et sous-gradients

Si  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles, la *dérivée directionnelle* de  $f$  au point  $x$  dans la direction de  $y$  est définie par la limite  $f'(x;y) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}$ , lorsqu'elle existe.

#### Théorème II.5

Si  $f$  est une fonction convexe définie sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles, alors pour tout  $y$ , le quotient de la définition de dérivée directionnelle  $\frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}$  est une fonction croissante en  $\lambda > 0$ .

Autrement dit,  $f'(x; y)$  existe pour tout  $y$  et, de plus,

$$f'(x; y) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}$$

démonstration

■ Considérons  $x$  et  $y$  éléments de  $\mathbb{R}^n$  et les scalaires  $\lambda_1, \lambda_2$  tels que  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

Nous avons alors que  $x + \lambda_1 y = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (x + \lambda_2 y) + (1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) x$

et puisque  $f$  est convexe, par le théorème II.1,

$$f(x + \lambda_1 y) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_2} f(x + \lambda_2 y) + (1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) f(x)$$

$$\text{Donc } \frac{f(x + \lambda_1 y) - f(x)}{\lambda_1} \leq \frac{f(x + \lambda_2 y) - f(x)}{\lambda_2}$$

ce qui signifie que le quotient est une fonction croissante en  $\lambda > 0$ .

Donc la limite existe toujours et nous pouvons écrire

$$f'(x; y) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}$$

■

Nous dirons que le vecteur  $x^*$  est un *sous-gradient* de la fonction convexe  $f$  au point  $x$  si  $f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x \rangle$  pour tout point  $z$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Géométriquement, un sous-gradient de  $f$  au point  $x$  est la pente d'une minorante affine linéaire exacte en  $x$ .

Nous appellerons *sous-différentiel* de  $f$  au point  $x$ , l'ensemble de tous les sous-gradients de  $f$  au point  $x$ . Nous le noterons  $\partial f(x)$ .

Donc le sous-différentiel de  $f$  au point  $x$  est l'ensemble des pentes des minorantes affines linéaires exactes en  $x$ .

Lorsque la fonction  $f$  est différentiable au point  $x$ , il existe une seule } minorante affine linéaire exacte au point  $x$ , c'est la tangente à la courbe de la fonction  $f$ . Le sous-différentiel de  $f$  au point  $x$  contient alors un seul élément, le gradient de  $f$  au point  $x$ .

Considérons quelques exemples.

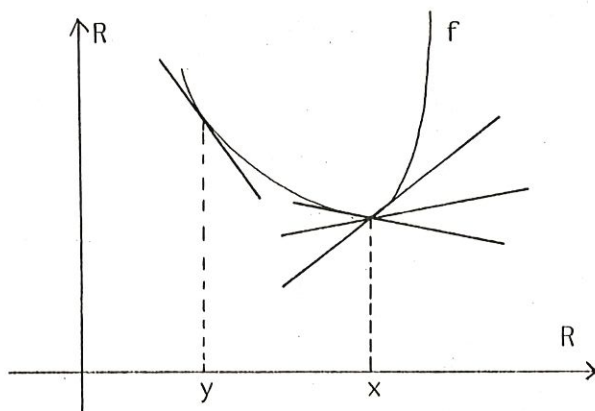


fig. 7

Au point  $x$ , la fonction  $f$  admet plusieurs minorantes affines linéaires exactes, elle y est en effet non différentiable.

Au point  $y$ , la fonction  $f$  est différentiable et la seule minorante affine linéaire exacte en  $y$  est la tangente à la courbe. Donc  $\partial f(y)$  se réduit à un singleton, son unique élément étant  $\nabla f(y)$ .

Envisageons un autre exemple.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\partial f(0) = [0, 1]$$

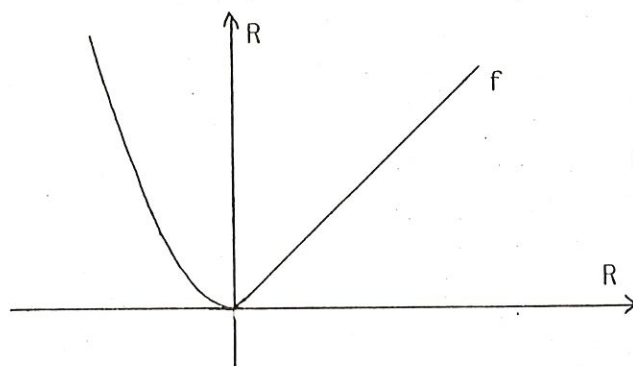


fig. 8

#### Théorème II.6

Si  $f$  est une fonction convexe définie sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles,  $x^*$  est un sous-gradient de  $f$  au point  $x$  si et seulement si, pour tout  $y$ ,  $f'(x; y) \geq \langle x^*, y \rangle$

#### démonstration

■

Démontrons tout d'abord la condition nécessaire.



Soit  $x^*$  un sous-gradient de  $f$  au point  $x$  ; par définition, nous pouvons écrire

$$f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z-x \rangle \quad \text{pour tout } z \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

Considérons  $z = x + \lambda y$  où  $\lambda$  est un scalaire strictement positif.

Nous obtenons alors, pour tout  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$

$$\frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} \geq \langle y, x^* \rangle$$

Si nous prenons la limite sur les  $\lambda$  strictement positifs dans cette expression, par définition de la dérivée directionnelle de  $f$  au point  $x$  dans la direction  $y$ , nous aurons  $f'(x; y) \geq \langle y, x^* \rangle$  pour tout  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Ceci termine la démonstration de la condition nécessaire.

Considérons à présent la condition suffisante.

Par hypothèse, nous savons que  $f'(x; y) \geq \langle y, x^* \rangle$  pour tout  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Appliquons le théorème II.5,  $\inf_{\lambda > 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} \geq \langle x^*, y \rangle$

et puisque ce théorème II.5 nous dit que le quotient  $\frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}$  est croissant en  $\lambda > 0$ , nous avons également

$$f(x + \lambda y) - f(x) \geq \langle x^*, \lambda y \rangle \quad \text{pour tout } y \text{ dans } \mathbb{R}^n$$

et en posant  $x + \lambda y = z$ , nous obtenons

$$f(z) - f(x) \geq \langle x^*, z-x \rangle \quad \text{pour tout } z \text{ dans } \mathbb{R}^n$$

c'est-à-dire, par définition,  $x^*$  est un sous-gradient de  $f$  au point  $x$ . ■

Nous définissons la *fonction support* d'un ensemble convexe  $C$  par :

$$\sup \{ \langle x, x' \rangle : x \in C \}$$

### Théorème II.7

Le sous-différentiel au point  $x$  d'une fonction  $f$  convexe définie sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles est un ensemble convexe, compact et non vide. De plus la dérivée directionnelle de  $f$  est la fonction support du sous-différentiel c'est-à-dire  $f'(x; y) = \sup \{ \langle x^*, y \rangle : x^* \in \partial f(x) \}$

démonstration

[12, p.217-218]

Théorème II.8

Si  $f_1, f_2, \dots, f_m$  sont des fonctions convexes définies sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles et si  $f = f_1 + f_2 + \dots + f_m$   
 alors  $\partial f(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) + \dots + \partial f_m(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$

démonstration

[12, p.223]

Nous étudierons dans les chapitres suivants un algorithme de minimisation d'une fonction  $F$ . Cette fonction  $F$  s'exprime comme le maximum de fonctions convexes définies sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles. Nous avons déjà établi au théorème II.3 que  $F$  est une fonction convexe. Nous allons maintenant nous intéresser au sous-différentiel de  $F$ .

Théorème II.9

Soit  $\{f_i\}_{i \in I}$  une suite finie de fonctions convexes définies sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles. Si  $F(x) = \max \{f_i(x) : i \in I\}$  et  
 $M(x) = \{i \in I : f_i(x) = F(x)\}$   
 alors  $\partial F(x) = \text{Co} \left( \bigcup \{ \partial f_i(x) : i \in M(x) \} \right)$

démonstration

■ Nous allons comparer les fonctions supports des deux ensembles :  $\partial F(x)$  et  $\text{Co} \left( \bigcup \{ \partial f_i(x) : i \in M(x) \} \right)$

a) Montrons  $F'(x; y) \geq \max \{ f_i'(x; y) \text{ avec } i \in M(x) \}$

En effet, si nous choisissons arbitrairement  $i$  dans  $M(x)$ , nous obtenons

$$f_i(x) = F(x), \text{ puisque } i \in M(x) = \{ i \in I : f_i(x) = F(x) \}$$

$$\text{et } F(x + \lambda y) \geq f_i(x + \lambda y), \text{ par définition de } F(x) = \max \{ f_i(x) : i \in I \}$$

donc

$$\frac{F(x + \lambda y) - F(x)}{\lambda} \geq \frac{f_i(x + \lambda y) - f_i(x)}{\lambda} \quad \text{pour tout } i \in M(x) \text{ et } \lambda > 0.$$

Si nous passons à la limite quand  $\lambda$  décroît vers 0, par définition de la dérivée directionnelle d'une fonction, nous obtenons

$$F'(x; y) \geq f_i'(x; y) \quad \text{pour tout } i \in M(x)$$

d'où

$$F'(x; y) \geq \max \{ f_i'(x; y) \text{ avec } i \in M(x) \}$$

b) Montrons  $\max \{ f_{i_j}'(x; y) \text{ avec } i_j \in M(x) \} \geq F'(x; y)$

Nous considérons une suite  $\{ \lambda_j \}$  où  $\lambda_j \geq 0$ , pour tout  $j$  tel que  $\{ \lambda_j \}$  converge vers 0.

La suite  $\left\{ \frac{F(x + \lambda_j y) - F(x)}{\lambda_j} \right\}$  admet une limite, par le théorème II.5.

Sa limite est la dérivée directionnelle de  $F$  au point  $x$  dans la direction  $y$ .

Nous construisons la suite  $\{ i_j \}$  où  $i_j \in M(x + \lambda_j y)$

donc pour chaque  $j$ ,  $i_j$  est un indice où le maximum est atteint en  $x + \lambda_j y$ .

Puisque  $I$  est fini, la suite  $\{ i_j \}$  contient un nombre fini d'éléments distincts ; donc il existe une suite d'indices  $\{ j_k \}$  tels que  $i_{j_k} = i_0$  pour tout  $k$ , c'est-à-dire

$\{ i_{j_k} \}$  est une sous-suite constante de la suite  $\{ i_j \}$ .

Montrons que  $i_0 \in M(x)$

Nous avons, par construction :  $i_0 \in M(x + \lambda_{j_k} y)$

ce qui est équivalent à  $f_{i_0}'(x + \lambda_{j_k} y) = F(x + \lambda_{j_k} y) \quad \forall k$

Comme  $f_{i_0}$  est une fonction convexe, définie sur  $\mathbb{R}^n$  et  $F$  le maximum de telles fonctions, elles sont toutes deux continues, grâce au théorème II.4

Donc, en passant à la limite lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$

nous obtenons  $f_{i_0}'(x) = F'(x)$

c'est-à-dire  $i_0 \in M(x)$

Par conséquent,

étant donné que  $i_0 \in M(x + \lambda_{j_k} y)$ , nous avons  $F(x + \lambda_{j_k} y) = f_{i_0}(x + \lambda_{j_k} y)$

et que  $i_0 \in M(x)$  c'est-à-dire  $F(x) = f_{i_0}(x)$ ,

dès lors pour la sous-suite particulière d'indices  $\{ j_k \}$ ,

nous obtenons

$$\frac{F(x + \lambda_{j_k} y) - F(x)}{\lambda_{j_k}} = \frac{f_{i_0}(x + \lambda_{j_k} y) - f_{i_0}(x)}{\lambda_{j_k}}$$

nous passons à la limite pour  $\lambda_{j_k}$  tendant vers 0

alors  $F'(x; y) = f_{i_0}'(x; y)$  pour  $i_0 = i_{j_k}$ , pour tout  $k$



Or  $f_{i_0}'(x;y) \leq \max \{ f_i'(x;y) : i \in M(x) \}$  puisque  $i_0 \in M(x)$

donc  $F'(x;y) \leq \max \{ f_i'(x;y) : i \in M(x) \}$

de a) et b), nous pouvons conclure  $F'(x;y) = \max \{ f_i'(x;y) : i \in M(x) \}$

c) Posons  $T = \text{Co} (\cup \{ \partial f_i(x) : i \in M(x) \} )$

Nous allons prouver que  $\max \{ f_i'(x;y) : i \in M(x) \}$  est la fonction support de l'ensemble  $T$ , c'est-à-dire

$$\sup \{ \langle y, x^* \rangle : x^* \in T \} = \max \{ f_i'(x;y) : i \in M(x) \}$$

En effet, si  $t$  est un élément de  $T$ , nous pouvons l'écrire sous la forme

$$t = \sum_{i \in M(x)} \lambda_i x_i^* \quad \text{où } x_i^* \in \partial f_i(x) \text{ et } \sum \lambda_i = 1 \text{ et } \lambda_i \geq 0$$

donc  $\langle y, t \rangle = \langle y, \sum \lambda_i x_i^* \rangle$

et par linéarité du produit scalaire,  $\langle y, t \rangle = \sum \lambda_i \langle y, x_i^* \rangle$

Par le théorème II.6, nous obtenons

$$\langle y, t \rangle \leq \sum_{i \in M(x)} \lambda_i f_i'(x;y) \leq \sum_{i \in M(x)} \lambda_i \max \{ f_i'(x;y) : i \in M(x) \} = \max \{ f_i'(x;y) : i \in M(x) \}$$

mais  $t$  est un élément arbitraire de  $T$ ,

$$\text{donc } \max \{ f_i'(x;y) : i \in M(x) \} \geq \sup \{ \langle y, x^* \rangle : x^* \in T \} \quad (1)$$

Nous savons également, grâce au théorème II.7, que pour  $i \in M(x)$

$$f_i'(x;y) = \sup \{ \langle y, x_i^* \rangle : x_i^* \in \partial f_i(x) \}$$

De plus,  $\partial f_i(x)$  est un sous-ensemble de  $T$ ,

$$\text{donc } f_i'(x;y) \leq \sup \{ \langle y, x^* \rangle : x^* \in T \}$$

et comme  $i$  est arbitraire dans  $M(x)$ ,

$$\max \{ f_i'(x;y) : i \in M(x) \} \leq \sup \{ \langle y, x^* \rangle : x^* \in T \} \quad (2)$$

de (1) et (2), nous concluons

$$\sup \{ \langle y, x^* \rangle : x^* \in T \} = \max \{ f_i'(x;y) : i \in M(x) \}$$

d) Puisque par le théorème II.7,  $F'(x;y) = \sup \{ \langle x^*, y \rangle : x^* \in \partial F(x) \}$

nous avons donc établi l'égalité entre les fonctions supports des deux ensembles  $T$  et  $\partial F(x)$ . Si nous utilisons le corollaire 13.1.1 [12, p.113] nous obtenons la thèse

$$\partial F(x) = \text{Co} (\cup \{ \partial f_i(x) : i \in M(x) \} )$$

Le problème général que nous voulons aborder s'énonce

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x)$$

Nous allons établir une condition nécessaire et suffisante pour que  $x$  soit un point minimum de la fonction convexe  $F$ .

#### Théorème II.10

*Si  $F$  est une fonction convexe définie sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles alors le point  $x$  est un minimum global de la fonction  $F$  si et seulement si le vecteur nul est un élément du sous-différentiel de  $F$  au point  $x$ .*

#### démonstration

■  $x$  est un point de minimum global de  $F$  si et seulement si pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $F(z) \geq F(x)$   
ou encore  $F(z) \geq F(x) + \langle z-x, 0 \rangle$  pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$   
ce qui signifie, par définition du sous-différentiel de  $F$  en  $x$ ,  $0 \in \partial F(x)$  ■

#### II.3. Direction de descente

Nous introduisons une dernière notion très importante pour un algorithme de minimisation : la direction de plus grande descente.

En optimisation différentiable, la direction de plus grande descente est l'opposé du gradient de la fonction.

Avant de généraliser la notion de direction de plus grande descente, nous en rappelons la définition

Si  $f$  est une fonction convexe définie sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles, 1)  $y$  est une direction de descente si et seulement si  $f'(x;y) \leq 0$ .

2)  $y$  est une direction de plus grande descente si et seulement si

$$f'(x;y) = \min \{ f'(x;z) : \|z\| \leq 1 \}$$

Dans le cas d'une fonction  $f$  convexe, définie sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles, un théorème nous permet de caractériser la direction de plus grande descente de  $f$ .

### Théorème II.11

*Si  $f$  est une fonction convexe définie sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles, la direction de plus grande descente au point  $x$  vaut  $\frac{-m}{\|m\|}$*

*où  $m$  est le vecteur de norme minimale du sous-différentiel de  $f$  au point  $x$ .*

### démonstration

■ Nous allons établir  $f'(x; \frac{-m}{\|m\|}) = \min \{ f'(x; y) : \|y\| \leq 1 \}$

a) nous prouvons que  $f'(x; \frac{-m}{\|m\|}) = -\|m\|$

Par le théorème II.7,  $f'(x; \frac{-m}{\|m\|}) = \max \{ \langle \frac{-m}{\|m\|}, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x) \}$

Nous devons démontrer  $\langle \frac{-m}{\|m\|}, x^* \rangle \leq -\|m\|$  pour tout  $x^* \in \partial f(x)$  (1)

car, puisque  $\partial f(x)$  est compact, le maximum sera atteint vu que le produit scalaire est continu.

Nous allons donc établir  $\|m\|^2 \leq \langle m, x^* \rangle$  pour tout  $x^* \in \partial f(x)$  (2)

qui est une formule équivalente à la formule (1).

Puisque  $m$  est le vecteur de norme minimale du convexe  $\partial f(x)$ , tout autre élément de  $\partial f(x)$  est de norme supérieure, c'est-à-dire

$$\|m\|^2 \leq \|\alpha x^* + (1-\alpha)m\|^2, \text{ pour tout } \alpha \in ]0,1[ \text{ et pour tout } x^* \in \partial f(x)$$

$$\text{ou } \|m\|^2 \leq \|m + \alpha(x^* - m)\|^2, \text{ pour tout } \alpha \in ]0,1[ \text{ et pour tout } x^* \in \partial f(x)$$

et par définition de la norme

$$\|m\|^2 \leq \langle m + \alpha(x^* - m), m + \alpha(x^* - m) \rangle, \text{ pour tout } \alpha \in ]0,1[ \text{ et } x^* \in \partial f(x)$$

Nous effectuons le produit scalaire pour obtenir

$$\|m\|^2 \leq \|m\|^2 + \alpha^2 \|x^* - m\|^2 + 2\alpha \langle m, x^* - m \rangle, \text{ pour tout } \alpha \in ]0,1[ \text{ et } x^* \in \partial f(x)$$

$$\text{c'est-à-dire } \alpha^2 \|x^* - m\|^2 + 2\alpha \langle m, x^* - m \rangle \geq 0,$$

pour tout  $\alpha \in ]0,1[$  et pour tout  $x^* \in \partial f(x)$

$$\text{ou, puisque } \alpha \text{ est non nul, } \alpha \|x^* - m\|^2 + 2\langle m, x^* - m \rangle \geq 0,$$

pour tout  $\alpha \in ]0,1[$  et pour tout  $x^* \in \partial f(x)$ .

Nous prenons la limite dans cette expression, lorsque  $\alpha$  tend vers 0 ,  
alors  $\langle m, x^* - m \rangle \geq 0$  , pour tout  $x^* \in \partial f(x)$

c'est-à-dire  $\langle m, x^* \rangle \geq \|m\|^2$  , pour tout  $x^* \in \partial f(x)$

Nous avons établi l'assertion (2).

b) Nous démontrons que  $\min \{ f'(x; y) : \|y\| \leq 1 \} = -\|m\|$

Par le théorème II.7, nous avons

$$\min \{ f'(x; y) : \|y\| \leq 1 \} = \min \left\{ \max \{ \langle y, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x) \} : \|y\| \leq 1 \right\}$$

Nous allons appliquer le corollaire 37.3.2 [12, p.393] qui permet de permuter

la minimisation et la maximisation si celles-ci ont lieu sur des ensembles

compacts ; ces hypothèses sont vérifiées car la minimisation se fait sur la

boule euclidienne unité de  $\mathbb{R}^n$  qui est compacte et la maximisation sur le

sous-différentiel qui est compact par le théorème II.7.

Donc  $\min \{ f'(x; y) : \|y\| \leq 1 \} = \max \{ \min \{ \langle y, x^* \rangle : \|y\| \leq 1 \} : x^* \in \partial f(x) \}$

Mais l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous permet d'obtenir

$$|\langle y, x^* \rangle| \leq \|y\| \cdot \|x^*\| \leq \|x^*\| \quad \text{si } \|y\| \leq 1$$

donc  $\langle y, x^* \rangle \geq -\|x^*\|$ .

Le minimum de  $\langle y, x^* \rangle$  est atteint lorsque  $y$  prend la valeur  $\frac{-x^*}{\|x^*\|}$ .

Par conséquent, par la définition du vecteur  $m$ ,

$$\begin{aligned} \min \{ f'(x; y) : \|y\| \leq 1 \} &= \max \{ -\|x^*\| : x^* \in \partial f(x) \} \\ &= -\min \{ \|x^*\| : x^* \in \partial f(x) \} = -\|m\| \end{aligned}$$

Nous avons établi : a)  $f'(x; \frac{-m}{\|m\|}) = -\|m\|$

$$b) \min \{ f'(x; y) : \|y\| \leq 1 \} = -\|m\|$$

d'où  $f'(x; \frac{-m}{\|m\|}) = \min \{ f'(x; y) : \|y\| \leq 1 \}$

ce qui signifie que  $\frac{-m}{\|m\|}$  est une direction de plus grande descente. ■

#### II.4. Approches du problème

Le problème considéré est  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x)$

avec  $F(x) = \max \{ f_i(x) : i=1, 2, \dots, p \}$

où les  $f_i$  sont des fonctions convexes définies sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles.



La première partie de ce chapitre a permis d'établir les conditions nécessaires et suffisantes d'extrémalité, il reste maintenant à répondre à une dernière question :

Comment construire une direction de plus grande descente pour obtenir un algorithme de minimisation convergent ?

Le problème restreint considéré est du type minimax puisque la fonction objective  $F$  est le maximum d'autres fonctions  $f_i$ . Sans imposer d'autres hypothèses - que les  $f_i$  soient différentiables ou non - la fonction  $F$  aura déjà certains points de non différentiabilité provoqués par la maximisation des fonctions convexes  $f_i$ . Aussi pour résoudre un tel problème faudra-t-il faire appel à un algorithme de type sous-gradients.

Pour construire des algorithmes de sous-gradients, il est logique de penser tout d'abord à une généralisation des algorithmes de gradients tels que la méthode de plus grande descente de Cauchy.

Dans le cas de fonctions différentiables, de nombreuses méthodes de minimisation de fonctions numériques définies sur  $R^n$  suivent le même schéma de construction.

Elles sont définies par la récurrence  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$  ; ceci permet de construire une suite  $\{x_k\}$  à partir d'une valeur initiale  $x_0$ . Le choix de la direction de descente  $d_k$ , habituellement fonction du gradient de  $f$  en  $x_k$ , est souvent  $-\nabla f(x_k)$  c'est-à-dire la direction opposée du gradient de la fonction au point  $x_k$  de la récurrence en cours. Le scalaire  $\alpha_k$  est déterminé par une recherche unidimensionnelle afin que  $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$  ; on considère généralement  $\alpha_k = \min_{0 \leq \alpha < +\infty} f(x_k + \alpha d_k)$  de sorte que  $x_{k+1}$  est un minimum

local de la fonction dans la direction  $d_k$ .

Diverses méthodes de ce type existent. Elles diffèrent par le choix du paramètre unidimensionnel et celui de la direction.

Pour résoudre un problème convexe non différentiable, il semble simple d'étendre la méthode de plus grande descente de Cauchy en utilisant le fait que la direction de plus grande descente est alors donnée par l'opposé de l'élément de norme minimale de l'enveloppe convexe de l'ensemble des sous-gradients (théorème II.11)

Malheureusement l'exemple qui suit nous montre que cette procédure de généralisation de la méthode de Cauchy ne converge pas nécessairement [4].

Considérons le contre-exemple suivant :

soit la fonction convexe  $f$ , non partout différentiable définie sur  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs réelles.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x,y) \rightarrow \begin{cases} 5(9x^2 + 16y^2)^{\frac{1}{2}} & \text{si } x > |y| \\ 9x + 16|y| & \text{si } x \leq |y| \end{cases}$$

Les points de non différentiabilité de cette fonction forment le demi-axe des  $x$  négatifs c'est-à-dire  $\{(x,y) : y=0 \text{ et } x \leq 0\}$

Ses courbes de niveau sont représentées dans le plan  $\mathbb{R}^2$  par la figure 9.

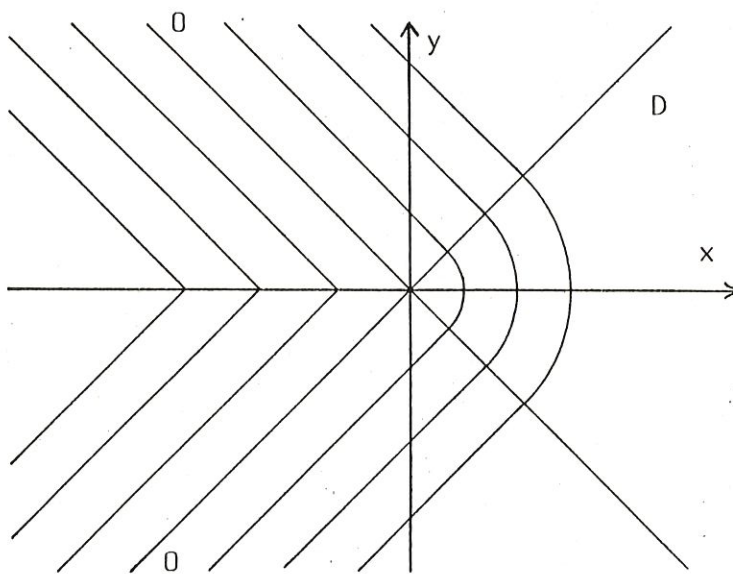


fig. 9

En choisissant le point de départ de telle façon que les points engendrés restent dans la région déterminée par l'ensemble  $\{(x,y) : x > |y|\}$ , comme la fonction  $f$  est différentiable, la minimisation est à chaque étape une minimisation exacte et par conséquent les directions de descente successives sont perpendiculaires. A ce moment, l'algorithme de plus grande descente de Cauchy converge vers le point  $(0,0)$  qui n'est pas le point optimal puisque le minimum de  $f$  vaut  $-\infty$ .

En effet, dans la région D déterminée par l'ensemble des points  $(x,y)$  tels que  $x > |y|$ , la fonction  $f$  est différentiable.

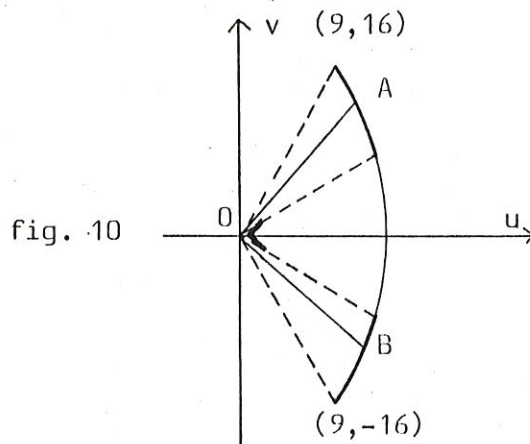
$$\text{Dès lors, } \nabla f(x,y) = \left( \frac{45x}{(9x^2 + 16y^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{80y}{(9x^2 + 16y^2)^{\frac{1}{2}}} \right), \forall (x,y) \in D$$

Effectuons un changement de variables :

$$u = \frac{45x}{(9x^2 + 16y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad v = \frac{80y}{(9x^2 + 16y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Dans le plan  $(u,v)$ , les points de  $D = \{ (x,y) : x > |y| \}$  se trouvent sur l'ellipse d'équation :  $\left(\frac{u}{15}\right)^2 + \left(\frac{v}{20}\right)^2 = 1$  et plus particulièrement sur la portion d'ellipse représentée à la figure 10. car si  $x > |y|$  alors  $9x^2 + 16y^2 < 25x^2$  et donc  $u = \frac{45x}{(9x^2 + 16y^2)^{\frac{1}{2}}} > 9$  et de même  $9x^2 + 16y^2 > 25y^2$  et donc  $|v| = \frac{80|y|}{(9x^2 + 16y^2)^{\frac{1}{2}}} < 16$ .

Si nous choisissons alors le point de départ dans la région D tel que  $\left(\frac{9}{16}\right)^2 |x| < |y|$  alors les directions seront alternativement OA et OB, représentées à la figure 10.



La portion supérieure renforcée de l'ellipse est la région dans laquelle peut varier A tandis que pour B, ce sera sur la portion inférieure renforcée de l'ellipse.

Un des plus anciens algorithmes de sous-gradients, qui n'est pas une généralisation immédiate de la méthode de plus grande descente de Cauchy, est un algorithme proposé par Polyak [10].

Il s'applique à une fonction convexe  $f$ .



La récurrence  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k$  permet de construire une suite d'itérées  $\{x_k\}$ , qui converge vers le point minimum  $x^*$  quand  $d_k$  est un élément du sous-différentiel de  $f$  en  $x_k$ .

De plus, la suite des paramètres unidimensionnels  $\{\alpha_k\}$  doit répondre aux deux conditions suivantes : \*\* la suite  $\{\alpha_k\}$  converge vers 0.

\*\* la série  $\sum \alpha_k$  est divergente.

Ces conditions sur  $\alpha_k$  peuvent provoquer une convergence très lente.

Par exemple, si  $\alpha_k = \frac{1}{k}$  alors  $x_k$  converge vers  $x^*$  comme  $\frac{1}{k} \rightarrow 0$  ;

le taux de convergence de cette méthode sera dans ce cas :

$$\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = \frac{\|x_k - \alpha_k d_k - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} \leq \frac{\|x_k - x^*\| + \|\alpha_k d_k\|}{\|x_k - x^*\|} = 1 + \frac{\|d_k\|}{k \|x_k - x^*\|}$$

Tant que le taux de convergence risque d'être proche de 1, la méthode risque d'avoir une convergence fort lente, d'où son peu d'utilité pratique.

Néanmoins cette méthode présentait un intérêt non négligeable dans le fait que  $d_k$  était choisi arbitrairement parmi les éléments du sous-différentiel de  $f$  en  $x_k$ . Autrement dit,  $d_k$  n'était pas nécessairement une direction de descente pour  $f$ . Il suffit, pour le vérifier, de considérer la représentation géométrique de la figure 11.

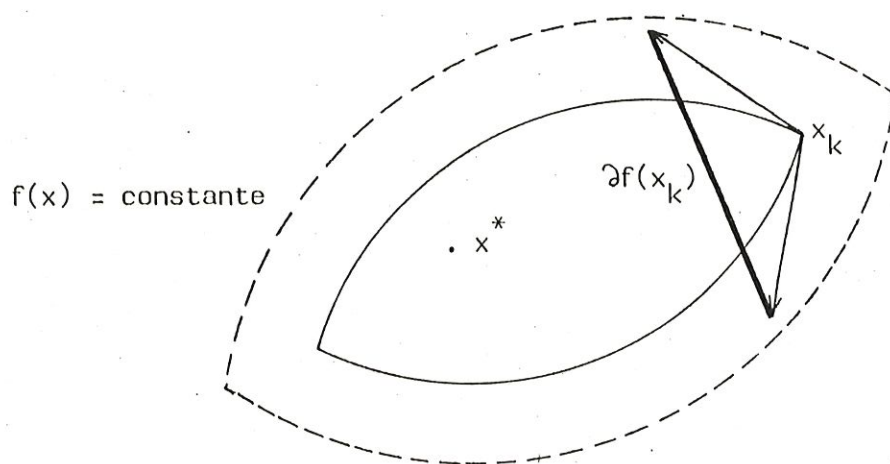


fig. 11

En un point de non différentiabilité de  $f$ , soit  $x_k$ , le sous-différentiel de  $f$  en  $x_k$  contient des directions extérieures à l'ensemble niveau  $\{x : f(x) \leq f(x_k)\}$  c'est-à-dire qu'il se peut que  $f(x_{k+1}) > f(x_k)$ .



Cependant en considérant un déplacement suffisamment petit le long de tout sous-gradient, élément du sous-différentiel de la fonction  $f$  en  $x_k$ , il est possible de construire un nouveau point  $x_{k+1}$  plus proche de  $x^*$  que ne l'était  $x_k$ .

Afin d'éviter cette lenteur de convergence, Polyak imagina un nouvel algorithme de sous-gradients, qui lui, possédait une convergence linéaire [11].

Il est défini par la récurrence 
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) - f(x^*)}{\|d_k\|^2} d_k$$

où  $d_k$  est toujours un sous-gradient quelconque parmi ceux du sous-différentiel de  $f$  en  $x_k$ .

Géométriquement,  $x_{k+1}$  n'est autre que l'intersection de deux tangentes au graphe de  $f$ .

\*\* la tangente en  $x_k$  de pente  $d_k$  définie par l'équation

$$f(y) - f(x_k) = \langle d_k, y - x_k \rangle$$

ce qui s'écrit encore

$$f(y) = f(x_k) + \langle d_k, y - x_k \rangle$$

\*\* la tangente en  $x^*$  de pente 0 définie par l'équation

$$f(y) - f(x^*) = \langle 0, y - x^* \rangle = 0$$

c'est-à-dire  $f(y) = f(x^*)$

En combinant ces deux équations, nous obtenons

$$\langle d_k, y - x_k \rangle + f(x_k) = f(x^*)$$

ou encore  $\langle d_k, y - x_k \rangle = - (f(x_k) - f(x^*))$

ce qui, multiplié par la direction  $d_k$ , donne

$$\|d_k\|^2 \cdot (y - x_k) = - (f(x_k) - f(x^*)) \cdot d_k$$

et vu que  $x_{k+1}$  est défini comme l'intersection de ces deux tangentes, il en résulte que

$$x_{k+1} = y = x_k - \frac{f(x_k) - f(x^*)}{\|d_k\|^2} \cdot d_k$$

Malheureusement le gros inconvénient de cet algorithme est que la valeur optimale minimale de  $f$ , c'est-à-dire  $f(x^*)$ , doit être connue a priori.

Il est alors évident que cet algorithme sera inapplicable dans la pratique.

Polyak y a, dès lors, apporté quelques modifications en remplaçant notamment  $f(x^*)$  par une borne supérieure très proche. Ceci complique alors l'algorithme dont on peut trouver les détails d'exécution dans [11].

Ce qu'il y a de caractéristique à ces deux méthodes est le fait que la direction  $d_k$  qui permet de construire le nouveau point  $x_{k+1}$  à partir de  $x_k$  est un sous-gradient quelconque choisi arbitrairement parmi le sous-différentiel de la fonction au point  $x_k$ . En d'autres termes, Polyak n'essaie jamais de déterminer tout le sous-différentiel de la fonction en  $x_k$  mais se contente de trouver un seul sous-gradient de la fonction au point  $x_k$ . Cependant, comme nous l'avons remarqué géométriquement au travers d'un exemple pour la première méthode de Polyak, la direction  $d_k$  n'est pas toujours une direction de descente. Aussi pour obtenir une convergence suffisamment rapide, il semblerait logique, à première vue, de considérer pour direction  $d_k$ , celle de plus grande descente c'est-à-dire l'opposé du vecteur de norme minimale du sous-différentiel de la fonction au point  $x_k$  ou encore l'opposé de la projection de l'origine sur  $\partial f(x_k)$  (théorème II.11 ).

C'est alors que surgissent deux problèmes :

\*\* cette méthode qui généralise l'algorithme de plus grande descente de Cauchy ne converge pas nécessairement comme l'a montré le contre-exemple ( p. 22 ).

\*\* pratiquement nous ne pourrions calculer cette direction de plus grande descente  $d_k$  que si le sous-différentiel de la fonction au point  $x_k$  est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de sous-gradients.

Si  $\partial f(x_k) = \text{Co} ( S )$  où  $S = \{ g_1, g_2, \dots, g_k \}$  est l'ensemble des sous-gradients distincts qui sont en nombre fini, alors nous résolvons le problème quadratique

$$\min \|d\|^2 \quad \text{avec } d = - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i$$

$$\text{où } g_i \in S, \quad \sum \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_i \geq 0.$$

grâce à un algorithme de P.Wolfe [14].

Il est dès lors nécessaire d'adapter la méthode de plus grande descente de Cauchy pour en faire un algorithme de minimisation de fonctions convexes non nécessairement partout différentiables, qui soit non seulement convergent mais également implémentable.

Le phénomène de non convergence d'une généralisation naïve de la méthode de Cauchy provient du fait que le sous-différentiel est un ensemble trop restreint en ce sens que

$$\partial f(x) = \text{Co} \left( \left\{ \lim_{i \rightarrow +\infty} \nabla f(x+h_i) : h_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0 \right\} \right)$$

c'est-à-dire, par la définition de Clarke [2], nous avons que le sous-différentiel de  $f$  au point  $x$  coïncide avec l'enveloppe convexe de l'ensemble des limites de la forme  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \nabla f(x+h_i)$  où  $h_i \rightarrow 0$  lorsque  $i \rightarrow +\infty$

Par conséquent le sous-différentiel d'une fonction  $f$  en un point  $x$  ne contient que les éléments de l'enveloppe convexe d'un ensemble constitué uniquement de limites de gradients. Afin donc de garantir la convergence, il est alors nécessaire de considérer un ensemble plus grand que le sous-différentiel lui-même [3].

Les méthodes pour réaliser cet élargissement du sous-différentiel peuvent être divisées en deux groupes suivant leur façon de procéder.

1. La première façon de faire consiste à ne tenir compte que d'une information locale partielle. Elle n'exige en général, à chaque étape, qu'un seul élément du sous-différentiel. A chaque itération, un sous-gradient est ajouté au groupe des sous-gradients déjà déterminés au cours des itérations antérieures. La direction de descente est déterminée à partir de ce groupe de sous-gradients. A certaines itérations, ce groupe de sous-gradients est réinitialisé de sorte qu'il ne contienne jamais qu'un nombre limité de sous-gradients. Ce genre de méthode répond donc aux deux conditions souhaitées, obtenir un algorithme convergent et implémentable puisque le nombre de sous-gradients approximant le sous-différentiel est toujours réduit à un nombre fini.

Ces méthodes, qui permettent de minimiser des fonctions convexes non différentiables, coïncident avec les méthodes de gradients conjugués dans le cas de fonctions convexes différentiables.

Cette idée fut exploitée notamment par Lemaréchal [8] et Wolfe [15].

Rappelons que le but est d'obtenir un point  $x^*$  tel que l'on ait à la fois, un ensemble de sous-gradients, soit  $G^*$ , qui soit une "bonne" approximation du sous-différentiel et d'autre part, que la direction de descente au point  $x^*$  notée  $d^*$ , qui est l'opposé du vecteur de norme minimale dans  $G^*$ , soit très petite. A ce moment-là, nous aurons  $0 \in \partial f(x^*)$  ce qui revient à la condition nécessaire et suffisante pour que  $x^*$  soit un minimum global de  $f$  (théorème II.10). (étant donné que nous avons seulement  $0 \in \partial f(x^*)$ ,  $x^*$  sera dit point stationnaire)



Lemaréchal utilise un agrandissement du sous-différentiel de la fonction convexe  $f$  au point  $x$  en définissant implicitement un voisinage en termes de valeurs de la fonction. Ce nouveau sous-différentiel est dit le  $\epsilon$ -sous-différentiel de la fonction  $f$  au point  $x$  et est noté  $\partial_{\epsilon} f(x)$ . Il est défini par l'ensemble  $\partial_{\epsilon} f(x) = \{ g : \forall y \in R^n, f(y) \geq f(x) + \langle g, y-x \rangle - \epsilon \}$ . De plus, dans son algorithme, il envisagera la réinitialisation à chaque étape.

Wolfe, par contre, considère un agrandissement du sous-différentiel de la fonction objective convexe  $f$  au point  $x$  qu'il établit directement à l'aide d'un voisinage  $V_{\epsilon}(x)$  ; c'est-à-dire qu'au lieu de considérer le sous-différentiel uniquement au point  $x$ , il tient compte des points dans un voisinage de rayon  $\epsilon$  autour de  $x$ . Son sous-différentiel agrandi sera alors l'enveloppe convexe de l'ensemble des limites de gradients de la fonction  $f$  en des points  $x_i$  proches de  $x$  ; ce qui formellement s'écrit

$$\text{Co} \left( \left\{ g : g = \lim_{i \rightarrow +\infty} \nabla f(x_i) \text{ où } x_i \rightarrow y \text{ pour } y \in V_{\epsilon}(x) \right\} \right)$$

De plus, Wolfe n'envisagera dans son algorithme la réinitialisation de son sous-différentiel approché que lorsque la direction de descente est déjà très petite.

Résumons leur façon d'envisager le problème :

- \*\* A chaque itération, l'algorithme permet de former un sous-différentiel "approché" à l'aide d'éléments du sous-différentiel en des points voisins et d'un seul élément du sous-différentiel au point actuel.
- \*\* Une "pseudo-direction de plus grande descente" est choisie dans le sous-différentiel "approché".

2. Une seconde façon de faire consiste en un agrandissement du sous-différentiel en chaque point. La direction de descente est alors déterminée à partir de ce sous-différentiel élargi. Mais tant que ces méthodes nécessitent la connaissance de tous les sous-gradients de la fonction objective  $F$  en chaque point, elles restent non implémentables sans hypothèses supplémentaires sur la fonction à minimiser.

Cependant, Dem'yanov et Malozemov [4] résolvent des problèmes de minimax avec des fonctions continûment différentiables en considérant aussi des fonctions  $f_i$  "proches" de la fonction objective  $F = \max_i f_i$ .



Explicitons plus en détail leur méthode.

Supposons  $F(x) = \max \{ f_i(x) : i \in I \}$  où toutes les fonctions  $f_i$  sont continûment différentiables et  $F(x) > 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$

Pour  $\varepsilon > 0$ , ils définissent les ensembles

$$* I_\varepsilon(x) = \{ i \in I : F(x) - f_i(x) \leq \varepsilon F(x) \}$$

l'ensemble des indices des fonctions  $f_i$  proches à  $\varepsilon F(x)$  près du maximum  $F(x)$ .

$$* L_\varepsilon(x) = \text{Co} \left( \bigcup \{ \nabla f_i(x) : i \in I_\varepsilon(x) \} \right)$$

c'est un agrandissement du sous-différentiel de  $F$  au point  $x$ .

En effet, cet ensemble contient le sous-différentiel classique de la fonction convexe non partout différentiable  $F$  au point  $x$  car, par le théorème II.9,  $\partial F(x) = \text{Co} \left( \bigcup \{ \partial f_i(x) : i \in M(x) \} \right)$  avec  $M(x) = \{ i \in I : f_i(x) = F(x) \}$

Par définition, nous avons donc  $M(x) = I_0(x) \subset I_\varepsilon(x)$  pour tout  $\varepsilon > 0$  puisque si  $F(x) = f_i(x)$ , alors  $F(x) - f_i(x) = 0 \leq \varepsilon F(x)$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .

De plus, puisque, dans l'algorithme de Dem'yanov, les fonctions  $f_i$  sont supposées continûment différentiables, le sous-différentiel de toute fonction  $f_i$  en un point  $x$  se réduit à son gradient en ce point c'est-à-dire  $\partial f_i(x) = \{ \nabla f_i(x) \}$

$$\begin{aligned} \text{par conséquent, } \text{Co} \left( \bigcup \{ \partial f_i(x) : i \in M(x) \} \right) &= \\ &= \text{Co} \left( \bigcup \{ \nabla f_i(x) : i \in I_0(x) \} \right) \\ &\subseteq \text{Co} \left( \bigcup \{ \nabla f_i(x) : i \in I_\varepsilon(x) \} \right) \end{aligned}$$

dès lors  $\partial F(x) \subseteq L_\varepsilon(x)$ , pour tout  $\varepsilon > 0$

et nous avons donc aussi  $\partial F(x) = L_0(x)$ .

L'algorithme de Dem'yanov est défini par la récurrence  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k$  où  $d_k$  minimise  $\|d\|^2$  pour  $d \in L_\varepsilon(x_k)$  et  $\alpha_k$  minimise  $F(x_k - \alpha d_k)$  pour  $\alpha \geq 0$

Ce qui n'est autre qu'une adaptation de la méthode de Cauchy avec un agrandissement du sous-différentiel en chaque point.

Le paramètre  $\varepsilon$  doit être choisi strictement positif pour des raisons à la fois théoriques et numériques.

En effet, si  $\varepsilon = 0$ , Dem'yanov a montré par un exemple [4] que l'algorithme pouvait converger vers un point non optimal et cela malgré le fait que, pour  $\varepsilon$  nul, le choix de  $-d_k$  à chaque itération n'est autre que la direction de plus grande descente.

En d'autres termes, cela nous ramène à la constatation que l'algorithme de plus grande descente n'est pas nécessairement convergent lors de la minimisation d'une fonction convexe  $F$  non partout différentiable.

D'autre part, la direction  $-d_k$  où  $d_k$  minimise  $\|d\|^2$  avec  $d \in L_\varepsilon(x_k)$  et  $\varepsilon > 0$  est une direction de plus grande descente.

En effet, si  $d_k$  minimise  $\|d\|^2$  avec  $d \in L_\varepsilon(x_k)$ , cela signifie que  $d_k$  est le vecteur de norme minimale dans  $L_\varepsilon(x_k)$ , autrement dit,  $d_k$  est la projection de l'origine sur l'enveloppe convexe  $L_\varepsilon(x_k)$ . Par conséquent,  $d_k$  forme un angle aigu avec tout vecteur de  $L_\varepsilon(x_k)$ , donc un mouvement dans la direction  $-d_k$  provoque une décroissance de chacune des fonctions  $f_i$  dont l'indice est dans  $I_\varepsilon(x_k)$  et par conséquent aussi une décroissance de la fonction maximum  $F$ .

Voici un schéma expliquant géométriquement le choix de la direction de descente

$-d_k$ . soit une fonction convexe non partout différentiable  $F$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles :  $F(x) = \max \{ f_i(x) : i \in I \}$  où les fonctions  $f_i$  sont des fonctions convexes continûment différentiables définies sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles.

Supposons que l'ensemble des indices actifs à  $\varepsilon$  près au point  $x$  soit  $I_\varepsilon(x) = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

et par définition  $L_\varepsilon(x) = \text{Co} ( \cup \{ \nabla f_i(x) : i \in I_\varepsilon(x) \} )$

La direction  $d$  est le vecteur de norme minimale de  $L_\varepsilon(x)$  c'est-à-dire la projection de l'origine sur  $L_\varepsilon(x)$ .

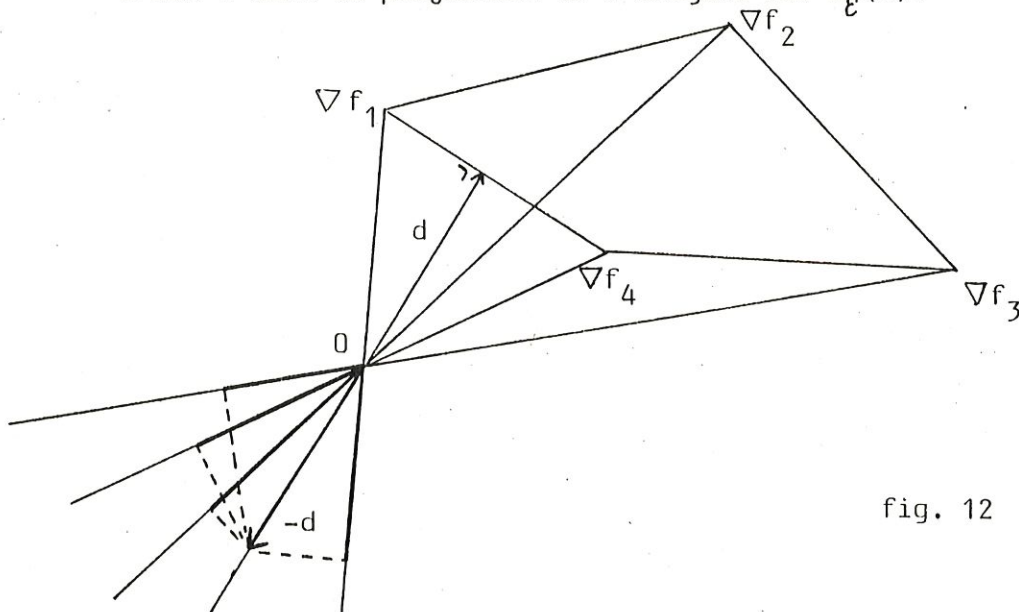


fig. 12

Nous constatons ainsi aisément que tout mouvement dans la direction  $-d$  provoque une décroissance de chacune des fonctions  $f_i$  puisque la projection de  $-d$  sur la direction de chaque vecteur  $\nabla f_i$  est dans le sens de  $-\nabla f_i$ .

Ainsi, grâce aux hypothèses supplémentaires de différentiabilité continue des fonctions  $f_i$ , l'algorithme de Dem'yanov est non seulement convergent [4] mais aussi implémentable pour des problèmes de la forme minimax. Cependant cet algorithme nécessite, à chaque étape, la résolution d'un problème de programmation quadratique convexe pour la recherche de la direction de plus grande descente puisque  $d_k$  est le vecteur qui minimise  $\|d\|^2$ ,  $d \in L_{\mathcal{E}}(x_k)$ . La recherche du vecteur de norme minimale dans un ensemble convexe a été traitée par Wolfe [14].

Il serait plus simple de pouvoir déterminer une "bonne" direction dans  $L_{\mathcal{E}}(x_k)$  sans devoir résoudre à chaque étape un problème d'optimisation.

Ainsi, tenant compte du fait que le taux de convergence linéaire de la seconde méthode de Polyak est gouverné par les grandeurs relatives des sous-gradients de la fonction en chaque point [11] et de plus qu'il a été démontré que le taux de convergence est proche de zéro si les tailles minimale et maximale des sous-gradients de la fonction sont approximativement les mêmes [11], l'algorithme de Dem'yanov a été modifié comme suit

la récurrence est donnée par  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k$

$$\text{où } d_k = \sum_{i \in I_{\mathcal{E}}(x_k)} \frac{g_i}{\|g_i\|_2} \quad \text{avec } g_i \in \partial f_i(x_k) \text{ pour } i \in I_{\mathcal{E}}(x_k)$$

et  $\alpha_k$  minimise  $F(x_k - \alpha d_k)$  pour  $\alpha \geq 0$

Le paramètre unidimensionnel  $\alpha_k$  est obtenu par approximation quadratique tandis que le critère d'arrêt utilisé est

$$\frac{|F(x_{k+1}) - F(x_k)|}{|F(x_k)|} < \delta \quad \text{où } \delta > 0 \text{ est un paramètre fixé}$$

Cette nouvelle procédure choisit donc un sous-gradient pour représenter chaque fonction dont l'indice est dans  $I_{\mathcal{E}}(x_k)$  tandis que la direction  $d_k$  est choisie par égale pondération de ces sous-gradients normalisés.

Nous découvrons la motivation de ce choix de direction de descente à travers les représentations des figures 13 et 14.



Considérons, par exemple, pour direction de descente  $d_k$ , la somme des gradients non normalisés des fonctions d'indice dans

$$I_E(x_k) = \{1, 2\}$$

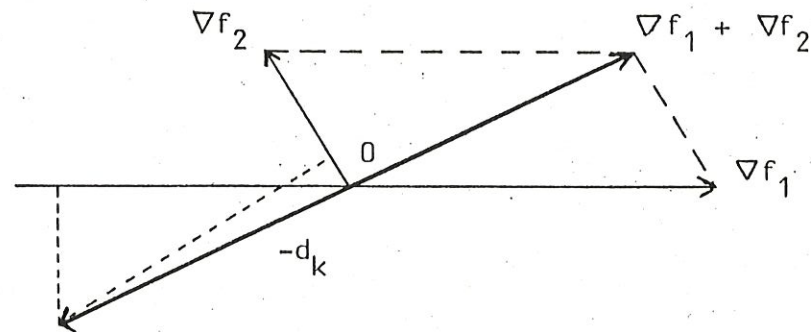


fig. 13

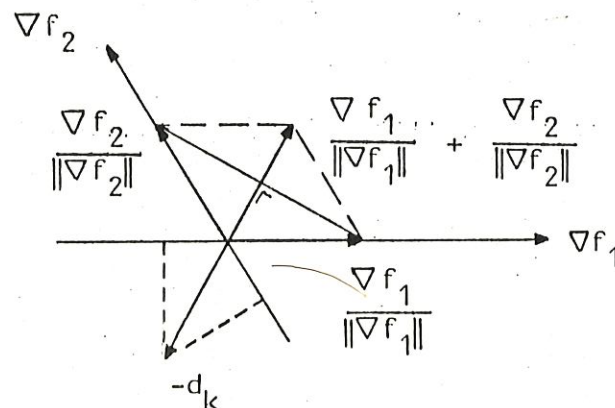
Nous remarquons :  $\|\nabla f_1(x_k)\| \gg \|\nabla f_2(x_k)\|$

Cette grande différence entre les normes des vecteurs  $\nabla f_1$  et  $\nabla f_2$  force la direction de descente choisie  $-d_k = -(\nabla f_1 + \nabla f_2)$  à être une fort mauvaise direction de descente relativement à  $f_2$ .

En effet, bien que la projection de  $-d_k$  sur la direction du vecteur  $\nabla f_1$  soit relativement grande et dirigée dans le sens de  $-\nabla f_1$ , ce qui signifie une forte décroissance de  $f_1$ , par contre cette même projection de  $-d_k$ , cette fois-ci, sur la direction de  $\nabla f_2$  est non seulement moins grande mais, ce qui est grave, elle est dans le sens de  $\nabla f_2$  ce qui signifie que cette direction de soit-disant descente  $-d_k$  provoque en fait une croissance de la fonction  $f_2$ , autrement dit  $f_2(x_k - \alpha d_k) > f_2(x_k) \quad \forall \alpha > 0$ .

En reprenant le même exemple, mais cette fois en normalisant les gradients avant de les sommer, leur grandeur relative ne joue plus aucun rôle dans le choix de la direction de descente.

fig. 14





Cette fois, la projection de la direction de descente

$$-d_k = - \left( \frac{\nabla f_1}{\|\nabla f_1\|} + \frac{\nabla f_2}{\|\nabla f_2\|} \right), \text{ aussi bien sur la direction } \nabla f_1$$

que sur celle de  $\nabla f_2$ , est dans le sens inverse du gradient de la fonction, ce qui signifie qu'elle provoque une décroissance aussi bien de  $f_1$  que de  $f_2$ .

Il est intéressant aussi de remarquer que, dans le cas où  $I_{\mathcal{E}}(x_k)$  est réduit à deux éléments, la somme des gradients normalisés est colinéaire avec le vecteur de norme minimale de leur enveloppe convexe, ce qui n'est plus vérifié si  $I_{\mathcal{E}}(x_k)$  contient plus de deux indices. Ceci contribue, sinon à prouver, du moins à soutenir l'affirmation que la direction de descente choisie est valable. De plus, il apparaît à la suite du grand nombre d'expériences traitées par Hearn et Lowe [6] que  $d_k$  est une direction de descente rapide. Malheureusement, jusqu'à ce jour, la convergence de cette méthode n'a pu être prouvée de façon théorique.

Comme il n'est pas certain que cette méthode donnera toujours une solution globale, nous avons préféré nous attacher à un autre algorithme qui est en fait une extension du travail de Dem'yanov et Malozemov [4].

Cette extension s'apparente à la seconde manière d'élargir le sous-différentiel classique en ce sens qu'elle exige le même type d'information locale.

L'élément nouveau consiste à considérer aussi les sous-gradients en des points voisins de l'itérée en cours. Ce nouvel algorithme n'est en fait qu'une adaptation de la méthode de Cauchy avec un agrandissement du sous-différentiel à deux niveaux : \*\* grâce à un paramètre  $\varepsilon$ , on tient compte des fonctions  $f_i$  suffisamment proches de la fonction maximale  $F$  au point de l'itération en cours.

\*\* grâce à un second paramètre  $\eta$ , on tient compte des points de non différentiabilité de ces fonctions  $f_i$  au voisinage du point de l'itération en cours.

Les hypothèses d'application et la convergence de cette méthode seront abordées dans les chapitres qui suivent.

## CHAPITRE III

INTRODUCTION A L'ADAPTATION  
 DE L'ALGORITHME DE DEM'YANOV  
 PAR CHATELON, HEARN ET LOWE

Ce chapitre est consacré aux notions nouvelles introductives à l'algorithme de J.Chatelon, D.W.Hearn et T.J.Lowe , adaptation de celui de Dem'yanov pour des fonctions  $f_i$  convexes non nécessairement différentiables.

### III.1. Hypothèses d'application de l'algorithme

L'algorithme en question est une méthode de sous-gradients pour la résolution de problèmes de type minimax

$$\min \{F(x) : x \in R^n\} \quad \text{où} \quad F(x) = \max \{f_i(x) : i=1,2,\dots,p\}$$

Pour être acceptable, celui-ci doit non seulement converger théoriquement mais aussi être implémentable pratiquement sur ordinateur. Ce sont là les deux raisons qui motivent les conditions d'application de l'algorithme à imposer aux fonctions  $f_i$ .

Le chapitre précédent nous a convaincu de la nécessité d'élargir le sous-différentiel classique pour éviter des problèmes dans la convergence de l'algorithme. Reste à voir la question de l'implémentation. Celle-ci se révèle impossible dans la pratique tant que la méthode exige la connaissance de tous les sous-gradients de la fonction objective en chaque point. Une façon possible de surmonter ce handicap est d'imposer des hypothèses supplémentaires sur les fonctions auxquelles l'algorithme s'applique.

C'est pourquoi chacune des fonctions  $f_i$  sera supposée pouvoir s'écrire en une somme de  $l$  fonctions  $f_{ij}$  convexes propres définies sur  $R^n$  et à valeurs réelles.

Par commodité, nous supposons chaque fonction  $f_i$  décomposée en la somme d'exactement 1 fonctions  $f_{ij}$  avec, si nécessaire, certaines d'entre elles identiquement nulles sur tout l'ensemble  $R^n$ .

Il est dès lors évident que les fonctions  $f_i$  sont, elles aussi, des fonctions convexes propres ( théorème II.2 ) et continues sur  $R^n$  ( théorème II.4 ).

Et par conséquent, la fonction objective  $F$  est aussi une fonction convexe propre continue définie sur  $R^n$  et à valeurs réelles ( théorème II.3 ).

L'hypothèse particulière d'application de l'algorithme est que les fonctions  $f_{ij}$  soient LFS ( Locally Finitely Subdifferentiable ). En effet, la définition de cette nouvelle notion répond aux inconvénients précités.

Une fonction convexe propre est LFS si, dans toute boule euclidienne bornée et fermée, le nombre de sous-différentiels distincts, correspondants aux points de non différentiabilité de cette fonction, est fini.

Illustrons cette notion par un exemple.

$$\text{soit la fonction } f : R^2 \rightarrow R : x \rightarrow ||x||_1 = \sum_{i=1}^2 |x_i|$$

Cette fonction n'est pas partout différentiable à cause des termes en valeur absolue qu'elle contient.

Représentons cette fonction à l'aide de ses courbes de niveau.

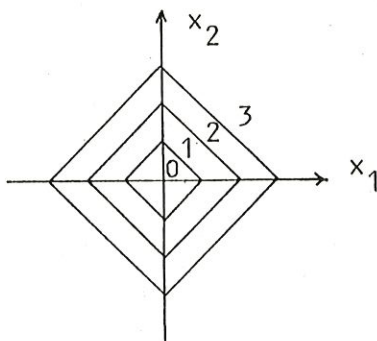


fig.15

La fonction est non différentiable le long des axes d'équation  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 0$  c'est-à-dire en une infinité de points.



Remarquons cependant que

pour tous les points de la forme  $(a,0)$  avec  $a > 0$ ,

$$\partial f( (a,0) ) = \text{Co} ( \{ (1,-1), (1,1) \} )$$

pour tous les points de la forme  $(0,a)$  avec  $a > 0$ ,

$$\partial f( (0,a) ) = \text{Co} ( \{ (1,1), (-1,1) \} )$$

pour tous les points de la forme  $(b,0)$  avec  $b < 0$ ,

$$\partial f( (b,0) ) = \text{Co} ( \{ (-1,1), (-1,-1) \} )$$

pour tous les points de la forme  $(0,b)$  avec  $b < 0$ ,

$$\partial f( (0,b) ) = \text{Co} ( \{ (-1,-1), (1,-1) \} )$$

c'est-à-dire tous les points de non différentiabilité d'un même demi-axe ont le même sous-différentiel.

Et le sous-différentiel de  $f$  en l'origine  $(0,0)$  est

$$\partial f( (0,0) ) = \text{Co} ( \{ (1,-1), (1,1), (-1,1), (-1,-1) \} )$$

Donc bien que la fonction possède une infinité de points de non différentiabilité, le nombre total d'ensemble distincts de sous-gradients associés à tous les points de non différentiabilité de  $f$  est 5, un nombre fini.

En d'autres termes, il s'agit là d'une fonction LFS.

Un autre exemple est celui des fonctions linéaires par morceaux.

Nous remarquerons au passage que ce concept est particulièrement approprié aux problèmes de localisation dans lesquels on minimise le plus souvent des fonctions contenant des normes, du genre  $\|x - a\|_q$  qui sont précisément des fonctions LFS.

D'autre part, le fait d'avoir décomposé chaque fonction  $f_i$  en un certain nombre de fonctions  $f_{ij}$  trouve ici sa raison d'être.

En effet, il est plus général d'imposer à chacune des fonctions  $f_{ij}$  d'être LFS que de l'exiger pour les fonctions  $f_i$ , étant donné que la somme de fonctions LFS n'est pas nécessairement LFS.

### III.2. Agrandissement du sous-différentiel classique

---

Nous définirons dans ce paragraphe les quelques ensembles qui permettront d'élargir le sous-différentiel classique. Mais ce n'est que dans le chapitre suivant que l'on découvrira que cet élargissement est approprié, en ce sens qu'il donne lieu à un algorithme convergent.

#### III.2.1. L'ensemble des indices actifs

---

Si  $\varepsilon$  est un réel positif fixé arbitrairement, en chaque point  $x$ , nous considérons  $R(x, \varepsilon) = \{ i \in \bar{p} : f_i(x) \geq F(x) - \varepsilon \}$ . Cependant dans la pratique,  $F(x) - \varepsilon$  n'est pas fort différent de  $F(x)$  quand  $F(x)$  est assez grand, puisqu'en général le réel arbitraire  $\varepsilon$  est choisi petit.

Par suite d'erreurs d'arrondi, il se pourrait donc que  $R(x, \varepsilon)$  se réduise à  $R(x, 0) = \{ i \in \bar{p} : f_i(x) \geq F(x) \}$  c'est-à-dire, puisque  $F(x) = \max \{ f_i(x) : i \in \bar{p} \}$ , à  $R(x, 0) = \{ i \in \bar{p} : f_i(x) = F(x) \}$ .

Mais ceci pourrait à nouveau affecter la convergence de l'algorithme ( exemple p.22 ) puisqu'on ne prendrait plus en considération les fonctions  $f_i$  proches à  $\varepsilon$  près de  $F$  au point  $x$  mais uniquement les seules fonctions  $f_i$  qui atteignent la valeur de la fonction objective maximale  $F$  en  $x$ .

Reprenant donc l'idée exposée par Dem'yanov [ 4 ], nous définissons dès lors

$$R(x, \varepsilon) = \{ i \in \bar{p} : f_i(x) \geq F(x) - \varepsilon F(x) \}$$

Il est de plus nécessaire de supposer  $F \geq 0$ .

En effet, supposons que  $F(x) < 0$  pour tout  $x$  dans  $R^n$ .

Comme, par hypothèse,  $\varepsilon \geq 0$ , en multipliant la première inégalité par  $\varepsilon$ , nous obtenons  $\varepsilon F(x) < 0$  ou encore  $-\varepsilon F(x) > 0$

ce qui additionné avec l'inégalité due à la définition de  $F(x)$ ,

c'est-à-dire  $F(x) = \max \{ f_i(x) : i \in \bar{p} \}$  donc  $F(x) \geq f_i(x)$  pour tout  $i \in \bar{p}$ , donne  $F(x) - \varepsilon F(x) > f_i(x)$ , pour tout  $i \in \bar{p}$  et pour tout  $x \in R^n$ .

Autrement dit,  $R(x, \varepsilon) = \emptyset$ , pour tout élément  $x$  de  $R^n$ .

C'est pourquoi nous supposons  $F(x) \geq 0$ , pour tout  $x \in R^n$ .

L'ensemble des indices actifs ainsi défini jouit de la propriété suivante :

Propriété III.2.1

Si  $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$  alors  $R(x, \varepsilon_1) \subseteq R(x, \varepsilon_2)$ .

démonstration

■ Considérons  $i \in R(x, \varepsilon_1)$  ce qui, par définition, signifie  $f_i(x) \geq F(x) - \varepsilon_1 F(x)$

Etant donné que  $F$  est supposée positive et que, par hypothèse,  $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ , nous avons aussi  $\varepsilon_1 F(x) \leq \varepsilon_2 F(x)$ , ou encore  $-\varepsilon_1 F(x) \geq -\varepsilon_2 F(x)$

En additionnant  $F(x)$  aux deux membres de cette inégalité et en la regroupant avec celle qui exprime que  $i \in R(x, \varepsilon_1)$ , nous obtenons

$$f_i(x) \geq F(x) - \varepsilon_1 F(x) \geq F(x) - \varepsilon_2 F(x)$$

c'est-à-dire  $f_i(x) \geq F(x) - \varepsilon_2 F(x)$

autrement dit, par définition de l'ensemble des indices actifs,  $i \in R(x, \varepsilon_2)$ . ■

III.2.2. L'ensemble des points de non différentiabilité dans

un voisinage

Pour élargir le sous-différentiel classique, nous devons tenir compte des points de non différentiabilité dans un voisinage du point considéré. C'est pourquoi, dès à présent, nous définissons l'ensemble  $G_{ij}$  associé à la fonction  $f_{ij}$  par la formule

$$G_{ij}(x, \eta) = \{x\} \cup \{y : y \in B(x, \eta) \text{ et } f_{ij} \text{ est non différentiable en } y\}$$

où  $B(x, \eta)$  désigne la boule euclidienne centrée en  $x$  et de rayon  $\eta$ .

III.2.3. L'ensemble des sous-gradients,  $S(x, \varepsilon, \eta)$

Nous définissons l'ensemble  $S(x, \varepsilon, \eta)$  qui sera le sous-différentiel élargi de la fonction  $F$ , obtenu en tenant compte, et des fonctions  $f_i$  proches à  $\varepsilon F$  près de  $F$ , et des points de non différentiabilité de  $F$  dans un voisinage du point où l'on calcule le sous-différentiel.



Sachant que  $\partial f_{ij}(G_{ij}(x, \eta)) = \cup \{ \partial f_{ij}(z) : z \in G_{ij}(x, \eta) \}$

nous définissons d'abord 
$$S_i(x, \eta) = \sum_{j=1}^l \partial f_{ij}(G_{ij}(x, \eta)) \quad \text{où } i \in \bar{p}$$

Plus précisément,  $S_i$  est la somme des sous-différentiels classiques de chacune des  $l$  fonctions LFS  $f_{ij}$  considérées aux points de non différentiabilité de  $f_{ij}$  dans un voisinage  $\eta$  autour de  $x$  ainsi qu'au point  $x$  lui-même.

Quant au sous-différentiel élargi de  $F$  en  $x$ , il est l'enveloppe convexe de la réunion de ces sous-différentiels  $S_i(x, \eta)$  des fonctions  $f_i$  proches de  $F(x)$  à  $\varepsilon F(x)$  près

c'est-à-dire 
$$S(x, \varepsilon, \eta) = \text{Co} \left( \cup \{ S_i(x, \eta) : i \in R(x, \varepsilon) \} \right)$$

Découvrons plus explicitement ces nouveaux ensembles à travers un exemple.

soit  $F(x) = \max \{ f_1(x), f_2(x) \}$

où  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, x_2) \rightarrow f_1(x) = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, x_2) \rightarrow f_2(x) = \|x - (1, -1)\|_1 = |x_1 - 1| + |x_2 + 1|$

Par hypothèse, 
$$f_i(x) = \sum_{j=1}^l f_{ij}(x)$$

Considérons les cas :  $l=1$  et  $l=2$

a)  $l = 1$

Les paramètres sont fixés :  $\varepsilon = 0.2$  et  $\eta = 1$ .

Calculons le sous-différentiel élargi au point  $x'$  de coordonnées  $(0.9, 1.)$

\*  $F(x') = \max \{ f_1(x'), f_2(x') \}$ , par définition.

or  $f_1(x') = |0.9| + |1| = 1.9$

$f_2(x') = |0.9 - 1| + |1 + 1| = 2.1$

donc  $F(x') = 2.1 = \max \{ 1.9, 2.1 \}$

\*  $R(x', \varepsilon) = \{ i \in \{1, 2\} : f_i(x') \geq F(x') - \varepsilon F(x') \}$

or  $F(x') - \varepsilon F(x') = 2.1 - 0.2 \times 2.1 = 1.68$

alors  $f_1(x') = 1.9 \geq 1.68$  et  $f_2(x') = 2.1 \geq 1.68$

donc  $R(x', \varepsilon) = \{ 1, 2 \}$

\*  $G_{ij}(x', \eta) = \{ x' \} \cup \{ y : y \in B(x', \eta) \text{ et } f_{ij} \text{ non différentiable en } y \}$



Voici les courbes de niveau représentant  $f_1$  et  $f_2$ .

fig. 16

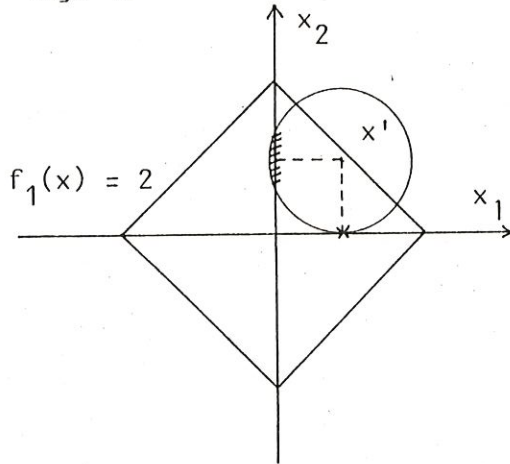
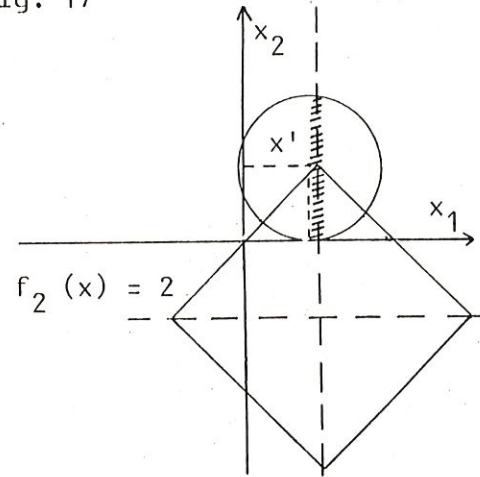


fig. 17



Les points de non différentiabilité de  $f_1$  sont les axes  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 0$  et ceux de la fonction  $f_2$  sont les axes  $x_1 = 1$  et  $x_2 = -1$ .

Ceux qui sont contenus dans le voisinage  $\eta$  de  $x' = (0.9, 1.)$  sont représentés en hachuré sur ces axes, respectivement dans la figure 16 pour  $f_1$  et dans la figure 17 pour la fonction  $f_2$ . Pour la fonction  $f_1$ , le point  $(0.9, 0.)$  est aussi un point de non différentiabilité dans le voisinage de rayon  $\eta$  centré en  $x'$ .

$$\text{Donc } G_1(x', \eta) = \{(0.9, 1.)\} \cup \{(0., x_2) : \|(0., x_2) - (0.9, 1.)\|_2 \leq 1\} \cup \{(0.9, 0.)\}$$

$$G_2(x', \eta) = \{(0.9, 1.)\} \cup \{(1., x_2) : \|(1., x_2) - (0.9, 1.)\|_2 \leq 1\}$$

$$* S_1(x', \eta) = \sum_{j=1}^1 \partial f_{1j}(G_{1j}(x', \eta)) \quad , \text{ par définition .}$$

$$\text{mais puisque } 1 = 1 \quad , \quad S_1(x', \eta) = \partial f_1(G_1(x', \eta))$$

$$\text{alors } S_1(x', \eta) = \partial f_1(G_1(x', \eta)) = \cup \{ \partial f_1(z) : z \in G_1(x', \eta) \}$$

$$= \partial f_1(x') \cup \partial f_1(\{(0., x_2) : (x_2 - 1.)^2 \leq 0.19\}) \cup \partial f_1((0.9, 0.))$$

or  $x' = (0.9, 1.)$  n'est pas un point de non différentiabilité de  $f_1$

$$\text{donc } \partial f_1(x') = \nabla f_1(x')$$

$$\begin{aligned} \text{alors } S_1(x', \eta) &= \{ (1., 1.) \} \cup \{ (-1., 1.), (1., 1.) \} \cup \{ (1., 1.), (1., -1.) \} \\ &= \{ (1., 1.), (-1., 1.), (1., -1.) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même, } S_2(x', \eta) &= \partial f_2(G_2(x', \eta)) \\ &= \partial f_2(x') \cup \partial f_2(\{ (1., x_2) : (x_2 - 1.)^2 \leq 0.99 \}) \end{aligned}$$

or  $(0.9, 1.)$  n'est pas un point de non différentiabilité de  $f_2$

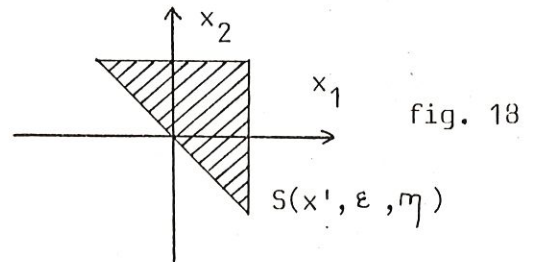
$$\text{donc } \partial f_2(x') = \nabla f_2(x')$$

$$\text{alors } S_2(x', \eta) = \{ (-1., 1.) \} \cup \{ (-1., 1.), (1., 1.) \} = \{ (1., 1.), (-1., 1.) \}$$

\* Le sous-différentiel élargi de  $F$  en  $x'$  devient donc

$$\begin{aligned} S(x', \varepsilon, \eta) &= \text{Co} \left( \bigcup \{ S_i(x', \eta) : i \in R(x', \varepsilon) \} \right) \\ &= \text{Co} \left( S_1(x', \eta) \cup S_2(x', \eta) \right), \text{ puisque } R(x', \varepsilon) = \{ 1, 2 \} \\ &= \text{Co} \left( \{ (1., 1.), (-1., 1.), (1., -1.) \} \right) \end{aligned}$$

Ce qui se représente géométriquement par la figure 18 .



b)  $l = 2$

$$\begin{aligned} \text{Les fonctions à considérer sont donc } f_{11}(x) &= |x_1| & f_{21}(x) &= |x_1 - 1.| \\ f_{12}(x) &= |x_2| & f_{22}(x) &= |x_2 + 1.| \end{aligned}$$

Les paramètres sont à nouveau fixés à  $\varepsilon = 0.2$  ;  $\eta = 1.$  et  $x' = (0.9, 1.)$   
Ces fonctions sont représentées à l'aide de leurs courbes de niveau dans les figures qui suivent.

Les points de non différentiabilité des différentes fonctions  $f_{ij}$  dans le voisinage  $\eta$  de  $x'$  sont représentés en hachuré.

- \* Pour la fonction  $f_{11}$ , les points de non différentiabilité sont situés sur l'axe  $x_1 = 0$  ( figure 19 )
- \* Pour la fonction  $f_{12}$ , le seul point de non différentiabilité est le point  $(0.9, 0.)$ , représenté par une croix dans la figure 20 .

- \* Pour la fonction  $f_{21}$ , les points de non différentiabilité sont situés sur l'axe  $x_1 = 1$  (figure 21)
- \* Pour la fonction  $f_{22}$ , il n'y a aucun point de non différentiabilité. Cette fonction est représentée à la figure 22.

fig. 19

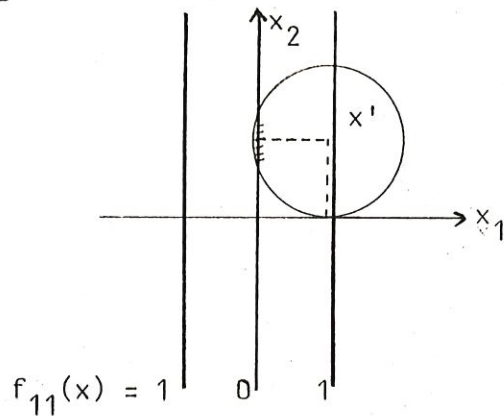


fig. 20

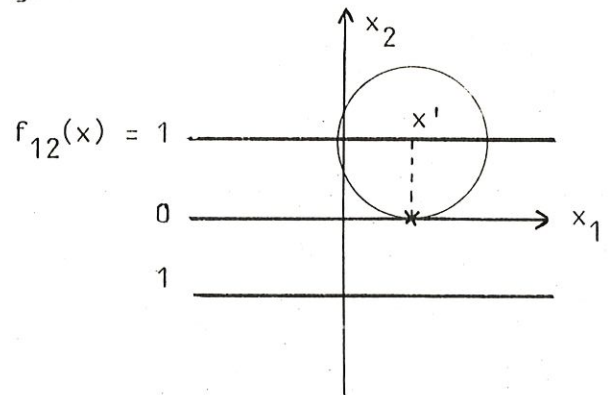


fig. 21

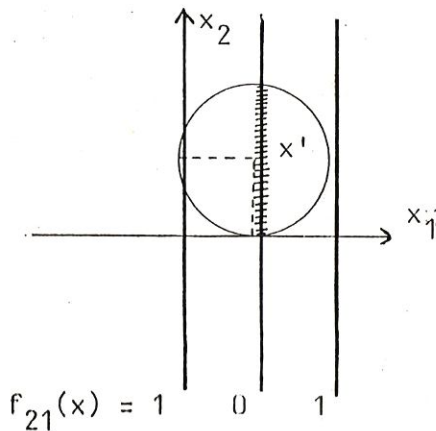
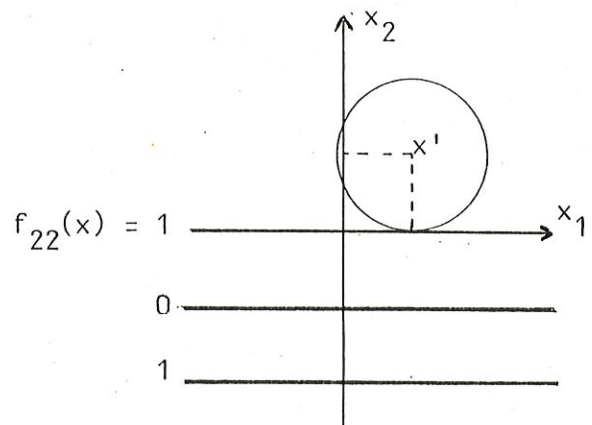


fig. 22



\*  $R(x', \eta)$  est identique au cas de  $l = 1$  car l'ensemble des indices actifs ne dépend que de  $x'$  et  $\eta$ , qui sont inchangés, et est indépendant du paramètre  $l$ , donc  $R(x', \eta) = \{1, 2\}$

$$* G_{11}(x', \eta) = \{x'\} \cup \{(0., x_2) : \|(0., x_2) - (0.9, 1.)\|_2 \leq 1\}$$

$$G_{12}(x', \eta) = \{x'\} \cup \{(0.9, 0.)\}$$

$$G_{21}(x', \eta) = \{x'\} \cup \{(1., x_2) : \|(1., x_2) - (0.9, 1.)\|_2 \leq 1\}$$

$$G_{22}(x', \eta) = \{x'\}$$

$$* \quad S_i(x', \eta) = \sum_{j=1}^1 \partial f_{ij}(G_{ij}(x', \eta))$$

$$\begin{aligned} S_1(x', \eta) &= \partial f_{11}(G_{11}(x', \eta)) + \partial f_{12}(G_{12}(x', \eta)) \\ &= \partial f_{11}(x') \cup \partial f_{11}(\{(0., x_2) : (x_2 - 1.)^2 \leq 0.19\}) \\ &\quad \cup \partial f_{12}(x') \cup \partial f_{12}((0.9, 0.)) \end{aligned}$$

mais  $x'$  n'est un point de non différentiabilité ni pour  $f_{11}$ , ni pour  $f_{12}$

$$\text{donc} \quad \partial f_{11}(x') = \nabla f_{11}(x') = (1., 0.)$$

$$\text{et} \quad \partial f_{12}(x') = \nabla f_{12}(x') = (0., 1.)$$

$$\begin{aligned} \text{alors} \quad S_1(x', \eta) &= \{(1., 0.)\} \cup \{(-1., 0.), (1., 0.)\} \cup \{(0., 1.)\} \\ &\quad \cup \{(0., 1.), (0., -1.)\} \\ &= \{(1., 0.), (-1., 0.), (0., 1.), (0., -1.)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(x', \eta) &= \partial f_{21}(G_{21}(x', \eta)) + \partial f_{22}(G_{22}(x', \eta)) \\ &= \partial f_{21}(x') \cup \partial f_{21}(\{(1., x_2) : (x_2 - 1.)^2 \leq 0.99\}) \cup \partial f_{22}(x') \end{aligned}$$

mais  $x'$  est un point de différentiabilité de  $f_{21}$  et de  $f_{22}$

$$\text{alors} \quad \partial f_{21}(x') = \nabla f_{21}(x') = (-1., 0.)$$

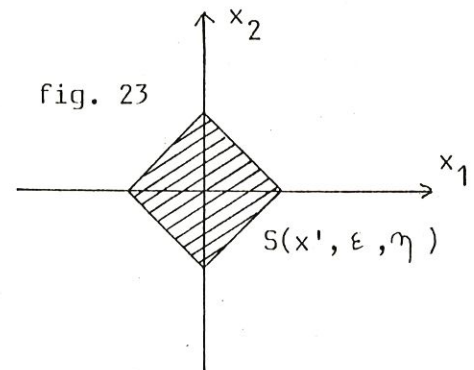
$$\text{et} \quad \partial f_{22}(x') = \nabla f_{22}(x') = (0., 1.)$$

$$\begin{aligned} \text{alors} \quad S_2(x', \eta) &= \{(-1., 0.)\} \cup \{(-1., 0.), (1., 0.)\} \cup \{(0., 1.)\} \\ &= \{(-1., 0.), (1., 0.), (0., 1.)\} \end{aligned}$$

\* Le sous-différentiel élargi de  $F$  en  $x'$  devient

$$\begin{aligned} S(x', \varepsilon, \eta) &= \text{Co}(\cup \{S_i(x', \eta) : i \in \{1, 2\}\}) \\ &= \text{Co}(\{(1., 0.), (-1., 0.), (0., 1.), (0., -1.)\}) \end{aligned}$$

La représentation géométrique de  $S(x', \varepsilon, \eta)$ , dans ce cas, est donnée par la figure 23.





### III.3. Propriétés du sous-différentiel élargi

Elargir le sous-différentiel ne suppose pas seulement une nouvelle définition qui englobe le sous-différentiel classique mais également que cet agrandissement jouit de propriétés intéressantes. Nous allons voir que pour des fonctions continues, convexes, propres, ce sous-différentiel élargi est une partie convexe, compacte, non vide de  $R^n$ , ce qui justifie l'élargissement considéré.

L'analyse convexe classique permet d'affirmer (théorème II.9)

$$\partial F(x) = \text{Co} \left( \bigcup \{ \partial f_i(x) : i \in R(x, 0) \} \right)$$

Ce qui permet de montrer la propriété suivante :

Propriété III.3.1  $\partial F(x) \subseteq S(x, \varepsilon, \eta)$

#### démonstration

■ En effet, par définition, pour tout  $i \in \bar{p}$  et pour tout  $j \in \bar{I}$   
 $G_{ij}(x, \eta) = \{ x \} \cup \{ y : y \in B(x, \eta) \text{ et } f_{ij} \text{ non différentiable en } y \}$   
 donc  $\{ x \} \subset G_{ij}(x, \eta)$ ,

or  $\partial f_{ij}(G_{ij}(x, \eta)) = \bigcup \{ \partial f_{ij}(z) : z \in G_{ij}(x, \eta) \}$

alors  $\partial f_{ij}(x) \subseteq \partial f_{ij}(G_{ij}(x, \eta))$ .

De plus, par hypothèse,  $f_i(x) = \sum_{j=1}^1 f_{ij}(x)$ , pour tout  $i \in \bar{p}$ .

alors, grâce au théorème II.8,  $\partial f_i(x) = \sum_{j=1}^1 \partial f_{ij}(x)$

or, par définition,  $S_i(x, \eta) = \sum_{j=1}^1 \partial f_{ij}(G_{ij}(x, \eta))$ , pour tout  $i \in \bar{p}$ .

Par conséquent, vu que  $\partial f_{ij}(x) \subseteq \partial f_{ij}(G_{ij}(x, \eta))$ , pour tout  $i \in \bar{p}$ ,

nous obtenons  $\partial f_i(x) = \sum_{j=1}^1 \partial f_{ij}(x) \subseteq \sum_{j=1}^1 \partial f_{ij}(G_{ij}(x, \eta)) = S_i(x, \eta)$

D'autre part, grâce à la propriété III.2.1 de l'ensemble des indices actifs, nous obtenons  $R(x, 0) \subseteq R(x, \varepsilon)$ , pour tout  $\varepsilon \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Dès lors, } \bigcup \{ \partial f_i(x) : i \in R(x,0) \} &\subseteq \bigcup \{ S_i(x,\eta) : i \in R(x,0) \} \\ &\subseteq \bigcup \{ S_i(x,\eta) : i \in R(x,\varepsilon) \} \end{aligned}$$

et par conséquent, il en est de même de leurs enveloppes convexes

$$\text{Co} \left( \bigcup \{ \partial f_i(x) : i \in R(x,0) \} \right) \subseteq \text{Co} \left( \bigcup \{ S_i(x,\eta) : i \in R(x,\varepsilon) \} \right)$$

D'autre part, par le théorème II.9,  $\partial F(x) = \text{Co} \left( \bigcup \{ \partial f_i(x) : i \in R(x,0) \} \right)$   
et, par définition,  $S(x,\varepsilon,\eta) = \text{Co} \left( \bigcup \{ S_i(x,\eta) : i \in R(x,\varepsilon) \} \right)$

par conséquent  $\partial F(x) \subseteq S(x,\varepsilon,\eta)$  . ■

Cette propriété assure que le sous-différentiel classique est encore couvert par le nouveau sous-différentiel élargi.

De plus, si les deux paramètres d'élargissement s'annulent, alors

$$\varepsilon = 0 \text{ entraîne } R(x,0) = \{ i \in \bar{p} : f_i(x) = F(x) \}$$

$$\eta = 0 \text{ entraîne } G_{ij}(x,0) = \{ x \}$$

$$\text{donc } S_i(x,0) = \sum_{j=1}^1 \partial f_{ij}(x) = \partial f_i(x) \text{ , par le théorème II.8 ,}$$

$$\text{et } S(x,0,0) = \text{Co} \left( \bigcup \{ \partial f_i(x) : i \in R(x,0) \} \right) = \partial F(x) \text{ , par le théorème II.9.}$$

Autrement dit, si l'élargissement aux deux niveaux :

- \* celui en  $\varepsilon$  concernant les fonctions  $f_i$  proches à  $\varepsilon F$  près de la fonction objective maximale  $F$
- \* celui en  $\eta$  tenant compte des points de non différentiabilité au voisinage du point en question

est effectué avec les paramètres particuliers  $\varepsilon = \eta = 0$  , c'est très logiquement que nous sommes ramenés au sous-différentiel classique habituel. Mais ce dont nous sommes, en plus, certains, à présent, c'est que pour un choix arbitraire des deux paramètres d'agrandissement, le sous-différentiel élargi contiendra toujours le sous-différentiel classique.

Nous en arrivons alors à la propriété essentielle de ce nouveau sous-différentiel élargi.

#### Propriété III.3.2

$S(x,\varepsilon,\eta)$  est une partie convexe, compacte et non vide de  $R^n$  .

démonstration

■ Par hypothèse, les fonctions  $f_{ij}$  sont des fonctions convexes propres et LFS c'est-à-dire que le nombre d'ensembles distincts de sous-gradients, associés aux points de non différentiabilité de chacune des fonctions  $f_{ij}$ , est supposé être fini sur tout ensemble borné.

Par conséquent, puisque le sous-différentiel d'une fonction convexe définie sur  $R^n$  et à valeurs réelles est un ensemble convexe, compact et non vide de  $R^n$  (théorème II.7),  $\partial f_{ij}(G_{ij}(x, \eta))$  où  $j \in \bar{I}$  et  $i \in \bar{p}$  est une union finie d'ensembles compacts, convexes, non vides.

Etant donné qu'une réunion finie d'ensembles compacts est encore un ensemble compact,  $\partial f_{ij}(G_{ij}(x, \eta))$  est un ensemble compact non vide.

De plus,  $\sum_{j=1}^1 \partial f_{ij}(G_{ij}(x, \eta)) = S_i(x, \eta)$ , par définition, sera aussi un

ensemble compact, pour tout  $i \in \bar{p}$ .

Dès lors,  $\bigcup \{S_i(x, \eta) : i \in R(x, \epsilon)\}$  est une union finie d'ensembles compacts non vides c'est-à-dire que c'est aussi un ensemble compact non vide.

Appliquons alors le théorème 17.2 de [12] à l'ensemble compact non vide de  $R^n$

$\bigcup \{S_i(x, \eta) : i \in R(x, \epsilon)\}$ , il permet de conclure que

$$\text{Co} \left( \bigcup \{S_i(x, \eta) : i \in R(x, \epsilon)\} \right) = S(x, \epsilon, \eta)$$

est un ensemble compact non vide de  $R^n$ , et à fortiori convexe. ■

#### III.4. Caractérisation de la direction de descente

Ce paragraphe généralise quelques résultats classiques de l'analyse convexe qui seront utiles au chapitre suivant dans l'algorithme de minimisation convergent vers un point stationnaire.

Caractérisons d'abord une direction de plus grande descente, dans notre cas particulier.

$S(x, \epsilon, \eta)$  contient le sous-différentiel classique (prop.III.3.1) mais aussi des informations locales. Il s'agit d'exploiter celles-ci de façon à déterminer une direction de descente pour  $F$ .



Dans ce but, nous définissons d'abord une fonction auxiliaire  $\psi$ .

En chaque point  $x$  de  $R^n$ ,

$$\psi(x, \varepsilon, \eta) = \min \left\{ \max \{ \langle g, d \rangle : d \in S(x, \varepsilon, \eta) \} : \|g\| \leq 1 \right\}$$

Puisque  $S(x, \varepsilon, \eta)$  et la boule euclidienne unité de  $R^n$  sont des parties compactes convexes non vides et grâce à la continuité du produit scalaire, cette fonction auxiliaire  $\psi(x, \varepsilon, \eta)$  apparaît être bien définie en tout point  $x$  de  $R^n$ .

Une propriété fort intéressante de la fonction auxiliaire  $\psi$  est la propriété suivante

Propriété III.4  $\psi(x, \varepsilon, \eta) = - \|Nr(S(x, \varepsilon, \eta))\|$

où  $Nr(S(x, \varepsilon, \eta))$  désigne l'élément de norme euclidienne minimale dans l'ensemble convexe compact non vide  $S(x, \varepsilon, \eta)$ .

#### démonstration

■ En effet, par définition de la fonction auxiliaire  $\psi$ ,  
 $\psi(x, \varepsilon, \eta) = \min \left\{ \max \{ \langle g, d \rangle : d \in S(x, \varepsilon, \eta) \} : \|g\| \leq 1 \right\}$

Utilisons alors le théorème 37.3.2 de [12].

Les hypothèses en sont satisfaites puisque les deux ensembles  $S(x, \varepsilon, \eta)$  et la boule euclidienne unité sont tous deux des ensembles convexes, compacts et non vides de  $R^n$  et que le produit scalaire est aussi continu sur  $R^n$ .

Dès lors nous pouvons permuter la minimisation et la maximisation,

$$\text{donc } \psi(x, \varepsilon, \eta) = \max \left\{ \min \{ \langle g, d \rangle : \|g\| \leq 1 \} : d \in S(x, \varepsilon, \eta) \right\}$$

Or le minimum du produit scalaire continu  $\langle g, d \rangle$  est atteint sur la boule euclidienne unité compacte en  $g = - \frac{d}{\|d\|}$ .

$$\text{Par conséquent, } \psi(x, \varepsilon, \eta) = \max \left\{ \left\langle - \frac{d}{\|d\|}, d \right\rangle : d \in S(x, \varepsilon, \eta) \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{ou encore } \psi(x, \varepsilon, \eta) &= \max \{ -\|d\| : d \in S(x, \varepsilon, \eta) \} \\ &= - \min \{ \|d\| : d \in S(x, \varepsilon, \eta) \} \\ &= - \|Nr(S(x, \varepsilon, \eta))\| \end{aligned}$$

■

Une conséquence immédiate de cette propriété est que la fonction auxiliaire  $\psi$  ne peut prendre que des valeurs négatives ou nulles.



Il est intéressant de remarquer l'analogie entre la fonction auxiliaire  $\psi$  et la dérivée directionnelle dans le cas d'une fonction convexe définie sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles.

En effet, si  $f$  est une fonction convexe définie sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs réelles, nous savons, par définition, que  $y$  est une direction de descente si et seulement si  $f'(x;y) \leq 0$  et  $y$  sera une direction de plus grande descente si et seulement si  $f'(x;y) = \min \{ f'(x;z) : \|z\| \leq 1 \}$

Or  $f'(x;z) = \max \{ \langle x^*, z \rangle : x^* \in \partial f(x) \}$ , grâce au théorème II.7.

Par conséquent  $y$  est une direction de plus grande descente si et seulement si  $f'(x;y) = \min \{ \max \{ \langle x^*, z \rangle : x^* \in \partial f(x) \} : \|z\| \leq 1 \}$  et bien sûr  $f'(x;y) \leq 0$ .

Or, par définition de la fonction auxiliaire  $\psi$ ,

$$\psi(x, \varepsilon, \eta) = \min \{ \max \{ \langle g, d \rangle : d \in S(x, \varepsilon, \eta) \} : \|g\| \leq 1 \}$$

ce qui revient encore à  $\psi(x, \varepsilon, \eta) = - \|Nr(S(x, \varepsilon, \eta))\| \leq 0$ .

Par conséquent,  $\psi(x, \varepsilon, \eta)$  a la même forme que la dérivée directionnelle dans la direction de plus grande descente avec toutefois le sous-différentiel classique  $\partial f(x)$  remplacé par le sous-différentiel élargi  $S(x, \varepsilon, \eta)$ .

A première vue donc, la direction  $g = - \frac{d_0}{\|d_0\|}$  où  $d_0 = Nr(S(x, \varepsilon, \eta))$  apparaît être une pseudo-direction de plus grande descente.

Il semble donc raisonnable de penser que cette fonction auxiliaire  $\psi$  donnera des informations quant à l'optimalité du point  $x$ . En effet, l'observation montre une similitude frappante entre le rôle joué par la fonction  $\psi$  définie à l'aide de  $S(x, \varepsilon, \eta)$  et le sous-différentiel classique  $\partial f(x)$  qui permettait de trouver une direction de plus grande descente. Il suffit pour cela de se rappeler les théorèmes établis au chapitre II.

\*\* Par le théorème II.11, la direction de plus grande descente en un point  $x$  est  $-\frac{m}{\|m\|}$  si  $m$  est le vecteur de norme minimale du sous-différentiel classique de  $f$  au point  $x$ .

Tandis que  $\psi(x, \varepsilon, \eta)$  est l'opposé de la norme du vecteur de norme minimale du sous-différentiel élargi  $S(x, \varepsilon, \eta)$ .

\*\* De même, par le théorème II.10, nous connaissons une condition nécessaire et suffisante pour que le point  $x$  soit un minimum global de  $f$  : il faut et il suffit que le vecteur nul soit élément du sous-différentiel classique de  $f$  au point  $x$ .

Tandis que  $\psi(x, \varepsilon, \eta) = - \| \text{Nr}(S(x, \varepsilon, \eta)) \| \leq 0$ , le cas particulier de  $\psi(x, \varepsilon, \eta) = 0$  signifierait que la norme du vecteur de norme minimale du sous-différentiel élargi  $S(x, \varepsilon, \eta)$  est nulle, ou encore, grâce à une des propriétés de la norme, que le vecteur de norme minimale du sous-différentiel élargi est le vecteur nul.

Tout ce qui va suivre ne servira qu'à montrer que ce rapprochement était fondé.

En fait, les théorèmes qui suivent nous donnent deux résultats fondamentaux pour la convergence de l'algorithme.

1. Si  $\psi(x, \varepsilon, \eta) = 0$  alors il est possible de borner la valeur optimale de la fonction.
2. Si  $\psi(x, \varepsilon, \eta) < 0$  alors il est encore possible de trouver une direction de descente pour la fonction.

Mais avant de considérer les deux cas possibles de la fonction auxiliaire, démontrons deux théorèmes préliminaires.

#### Théorèmes III.1

Pour tout sous-ensemble compact non vide  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  
les sous-différentiels des fonctions  $f_{ij}$  sont uniformément bornés  
sur l'ensemble  $X' = \{y : y \in B(x, \eta) \text{ et } x \in X\}$

Autrement dit, il existe une constante strictement positive  $M$  ( $0 < M < +\infty$ )  
tel que pour tout  $y \in X'$  et pour tout sous-gradient  $s \in \partial f_{ij}(y)$  :  
 $\|s\| \leq M$  pour tout  $i \in \bar{p}$  et pour tout  $j \in \bar{l}$ .

#### démonstration

- Par hypothèse,  $X$  est un ensemble compact non vide  
alors  $X'$  est aussi un compact non vide car il est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$
- borné par la même borne que  $X$  augmenté de  $\eta$ ,
  - fermé puisque c'est l'image réciproque du fermé  $[0, +\eta]$  par l'application continue  $d(\cdot, X)$ .

Nous pouvons par conséquent appliquer le théorème 24.7 de [12].

Dès lors  $\partial f_{ij}(X')$  est un sous-ensemble compact non vide de  $R^n$  et le nombre  $M_{ij} = \sup \{ \|s\| : s \in \partial f_{ij}(X') \}$  est fini.

Prenons alors pour  $M$  le maximum des  $M_{ij}$  pour  $i \in \bar{p}$  et  $j \in \bar{I}$  et il s'ensuit alors que

$$\forall y \in X', \forall s \in \partial f_{ij}(y) : \|s\| \leq M, \forall i \in \bar{p}, \forall j \in \bar{I}.$$

$$\text{Supposons } V(z) = \max \{ \langle w_k, z \rangle - v_k : k \in \bar{q} \}$$

où  $w_k$  sont  $q$  vecteurs donnés de  $R^n$  et  $v_k$  sont  $q$  nombres réels et donc  $z \in R^n$ .

Le théorème qui suit donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'infimum de la fonction linéaire par morceaux  $V(z)$  soit atteint.

### Théorème III.2

L'infimum de  $V(z)$  est atteint si et seulement si il existe une combinaison linéaire convexe des  $q$  vecteurs  $w_k$  de  $R^n$  qui soit égale au vecteur nul.

Autrement dit, il existe  $z^* \in R^n$  tel que  $V(z^*) = v^* = \inf \{ V(z) : z \in R^n \}$  si et seulement si il existe  $q$  scalaires  $\lambda_k \geq 0$  tels que

$$\sum_{k=1}^q \lambda_k = 1 \text{ et } \sum_{k=1}^q \lambda_k w_k = 0.$$

$$\text{De plus, } v^* \geq - \sum_{k=1}^q \lambda_k v_k$$

$$\text{et si les } \lambda_k \text{ sont uniques, } v^* = - \sum_{k=1}^q \lambda_k v_k.$$

### démonstration

■ L'infimum  $v^*$  de la fonction  $V(z)$  définie sur  $R^n$  est atteint si et seulement si le problème linéaire suivant a une solution optimale

$\min v$  sous les contraintes  $\langle w_k, z \rangle - v_k - v \leq 0$  pour tout  $k \in \bar{q}$   
ce qui sous forme matricielle s'écrit

$$\min (v \ z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sous les contraintes } (v \ z) \begin{pmatrix} -1 \\ w_k \end{pmatrix} \leq v_k \text{ pour tout } k \in \bar{q}$$

où les inconnues sont  $v \in R$  et  $z \in R^n$

donc  $0 \in R^n$ ,  $w_k \in R^n$  et  $v_k \in R$ .



Or  $\min v$  est équivalent à  $-\max -v$ .

Dès lors, on se trouve devant un problème du genre

$\max y.b$  sous les contraintes  $y.A \leq c$  avec  $y$  de signe quelconque.

Or il s'agit là du dual du problème

$\min c.x$  sous les contraintes  $A.x = b$  et  $x \geq 0$  [13, p.110].

Mais comme nous travaillons dans l'espace de dimension finie  $R^n$ , le dual du problème dual est en fait le problème primal.

Par conséquent, le dual de notre problème initial écrit sous la forme matricielle

$-\max (v \ z) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  sous les contraintes  $(v \ z) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ w_k \end{pmatrix} \leq v_k$ , pour tout  $k \in \bar{q}$

s'écrit, lui, sous la forme suivante

$$-\min \sum_{k=1}^q v_k \lambda_k \quad \text{sous les contraintes} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ w_{11} & w_{21} & w_{31} & \dots & w_{q1} \\ w_{12} & w_{22} & \dots & \dots & w_{q2} \\ w_{13} & \dots & \dots & \dots & w_{q3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{1n} & w_{2n} & \dots & \dots & w_{qn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \dots \\ \lambda_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et  $\lambda_k \geq 0$  pour tout  $k \in \bar{q}$

où les nouvelles inconnues sont  $q$  réels  $\lambda_k$ .

Ce qui peut aussi s'écrire

$$-\min \sum_{k=1}^q v_k \lambda_k \quad \text{ou encore} \quad \max - \sum_{k=1}^q v_k \lambda_k$$

sous les contraintes

sous les contraintes

$$- \sum_{k=1}^q \lambda_k = -1$$

$$\sum_{k=1}^q \lambda_k = 1$$

$$\sum_{k=1}^q \lambda_k w_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^q \lambda_k w_k = 0$$

et  $\lambda_k \geq 0$  pour tout  $k \in \bar{q}$

et  $\lambda_k \geq 0$  pour tout  $k \in \bar{q}$

Par la théorie de la dualité, si le dual est admissible, la solution du problème primal correspondant est finie [9].



Donc l'infimum de  $V(z)$  est atteint si et seulement si le problème dual a une solution c'est-à-dire il existe  $q$  réels  $\lambda_k \geq 0$  tels que

$$\sum_{k=1}^q \lambda_k = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^q \lambda_k w_k = 0.$$

Et grâce à la propriété de la théorie de la dualité :

toute solution du primal est plus grande ou égale à toute solution du dual correspondant  $[g]$ ,

donc  $v^* \geq - \sum_{k=1}^q \lambda_k v_k.$

Et si les  $\lambda_k$ ,  $k \in \bar{q}$ , sont uniques c'est-à-dire si le dual n'admet qu'une et une seule solution optimale, le problème primal n'admet lui aussi qu'une et une seule solution optimale et elle coïncide avec la solution optimale du dual  $[g]$ .

Par conséquent alors  $v^* = - \sum_{k=1}^q \lambda_k v_k.$

#### III.4.1. Borne sur la valeur optimale de la fonction

---

Considérons à présent le premier cas possible :  $\psi(x, \varepsilon, \eta) = 0$ .

Définissons d'abord la notion de point stationnaire.

Un point  $x$  sera dit *stationnaire* si et seulement si  $\psi(x, \varepsilon, \eta) = 0$

En tenant compte de la notation  $F^* = F(x^*)$  pour la valeur de la fonction objective au point optimal, voici le premier des deux résultats fondamentaux qui fournit une borne sur la différence entre la valeur de la fonction au point optimal et la valeur de la fonction en un point stationnaire.

#### Théorème III.3

Pour tout point stationnaire  $x$ , élément d'un ensemble compact  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,

$$(1 - \varepsilon) F(x) - 2\ell\eta M \leq F^* \leq F(x)$$

démonstration

■ Par hypothèse,  $x$  est un point stationnaire

ce qui signifie, par définition :  $\psi(x, \varepsilon, \eta) = 0$

or  $\psi(x, \varepsilon, \eta) = \min \{ \max \{ \langle g, d \rangle : d \in S(x, \varepsilon, \eta) \} : \|g\| \leq 1 \}$

par définition

$$= - \| \text{Nr}(S(x, \varepsilon, \eta)) \| \quad (\text{propriété III.4})$$

donc  $\| \text{Nr}(S(x, \varepsilon, \eta)) \| = 0$

ce qui entraîne, par définition d'une norme, que le vecteur de norme minimale dans  $S(x, \varepsilon, \eta)$  est le vecteur nul.

Par définition,  $S(x, \varepsilon, \eta) = \text{Co} ( \cup \{ S_i(x, \eta) : i \in R(x, \varepsilon) \} )$

Utilisant le théorème 17.1 de [12]

nous obtenons

$0 \in S(x, \varepsilon, \eta)$  si et seulement si il existe  $q$  vecteurs  $w_k$  de  $\mathbb{R}^n$  et

$q$  scalaires  $\lambda_k$  tels que  $\lambda_k \geq 0$  pour tout  $k \in \bar{q}$  avec  $q \leq n+1$  et

$$\sum_{k=1}^q \lambda_k = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^q \lambda_k w_k = 0$$

avec  $w_k \in \cup \{ S_i(x, \eta) : i \in R(x, \varepsilon) \}$

Par conséquent, pour un  $k$  arbitraire tel que  $1 \leq k \leq q$ , il existe au moins

un  $h \in R(x, \varepsilon)$  tel que  $w_k \in S_h(x, \eta)$ ,

or par définition  $S_h(x, \eta) = \sum_{j=1}^1 \partial f_{hj}(G_{hj}(x, \eta))$ ,

dès lors  $w_k$  s'écrit comme  $\sum_{r=1}^1 w_{kr}$  où  $w_{kr} \in \partial f_{hr}(G_{hr}(x, \eta))$  pour  $r \in \bar{1}$

Soit  $y_{kr} \in G_{hr}(x, \eta)$  tel que  $w_{kr} \in \partial f_{hr}(y_{kr})$  pour  $r \in \bar{1}$ .

Par définition du sous-différentiel de  $f_{hr}$  au point  $y_{kr}$  :

$$f_{hr}(z) \geq f_{hr}(y_{kr}) + \langle w_{kr}, z - y_{kr} \rangle, \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Considérons également  $s_{hr} \in \partial f_{hr}(x)$ ,

par définition, nous avons donc aussi :

$$f_{hr}(z) \geq f_{hr}(x) + \langle s_{hr}, z - x \rangle, \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}^n.$$

Si , en particulier,  $z=y_{kr}$

$$f_{hr}(y_{kr}) \geq f_{hr}(x) + \langle s_{hr}, y_{kr}-x \rangle \quad (2)$$

En additionnant les inégalités (1) et (2), nous obtenons

$$f_{hr}(z) \geq f_{hr}(x) + \langle w_{kr}, z-y_{kr} \rangle + \langle s_{hr}, y_{kr}-x \rangle \quad (3)$$

Utilisons le théorème III.1 :

$s_{hr} \in \partial f_{hr}(x)$  et  $x \in X$  compact par hypothèse

par conséquent, il existe une constante  $M$  ( $0 < M < +\infty$ ) telle que  $\|s_{hr}\| \leq M$

d'autre part, puisque  $y_{kr} \in G_{hr}(x, \eta) : \|y_{kr}-x\| \leq \eta$

dès lors, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\langle s_{hr}, y_{kr}-x \rangle| \leq \|s_{hr}\| \cdot \|y_{kr}-x\| \leq M\eta$$

et donc  $\langle s_{hr}, y_{kr}-x \rangle \geq -M\eta$

Dès lors, l'inégalité (3) devient :  $f_{hr}(z) \geq f_{hr}(x) + \langle w_{kr}, z-y_{kr} \rangle - M\eta$

Cette inégalité est encore vraie pour tout  $r \in \bar{I}$ ,

donc en sommant sur  $r \in \bar{I}$ , nous obtenons

$$\sum_{r=1}^1 f_{hr}(z) \geq \sum_{r=1}^1 f_{hr}(x) + \sum_{r=1}^1 \langle w_{kr}, z-y_{kr} \rangle - \sum_{r=1}^1 M\eta$$

c'est-à-dire  $f_h(z) \geq f_h(x) + \sum_{r=1}^1 \langle w_{kr}, z-y_{kr} \rangle - M\eta 1$  ;

de plus, puisque  $h \in R(x, \varepsilon) : f_h(x) \geq F(x) - \varepsilon F(x)$

donc, comme  $F(z) = \max \{ f_i(z) : i \in \bar{p} \}$ ,

$$F(z) \geq f_h(z) \geq F(x) - \varepsilon F(x) + \sum_{r=1}^1 \langle w_{kr}, z-y_{kr} \rangle - M\eta 1$$

c'est-à-dire  $F(z) \geq (1-\varepsilon)F(x) + \sum_{r=1}^1 \langle w_{kr}, z-y_{kr} \rangle - M\eta 1$  .

Puisque  $k$  est arbitraire, nous obtenons encore

$$F(z) \geq (1-\varepsilon)F(x) + \max_{k \in \bar{q}} \left\{ \sum_{r=1}^1 \langle w_{kr}, z-y_{kr} \rangle \right\} - M\eta 1 \quad (4)$$

Posons  $\sum_{r=1}^1 \langle w_{kr}, y_{kr} \rangle = v_k$  afin d'appliquer le théorème III.2.

En effet, par le fait que  $0 \in S(x, \varepsilon, \eta)$ , nous connaissons l'existence de  $q$  réels  $\lambda_k \geq 0$  et  $q$  vecteurs  $w_k$  de  $R^n$  avec  $q \leq n+1$

tels que  $\sum_{k=1}^q \lambda_k = 1$  et  $\sum_{k=1}^q \lambda_k w_k = 0$ , par le théorème 17.1 de [12].

Par conséquent, grâce à l'équivalence du théorème III.2, l'infimum  $v^*$  de  $V(z) = \max \{ \langle w_k, z \rangle - v_k : k \in \bar{q} \}$  est atteint et satisfait :

$$v^* \geq - \sum_{k=1}^q \lambda_k v_k.$$

Prenant le minimum pour  $z \in R^n$  dans l'inégalité (4), nous avons

$$F^* = \min_{z \in R^n} F(z) \geq (1 - \varepsilon) F(x) - \sum_{k=1}^q \lambda_k v_k - M \eta 1 \quad (5)$$

$$\text{puisque } \max_{k \in \bar{q}} \left\{ \sum_{r=1}^1 \langle w_{kr}, z - y_{kr} \rangle \right\} = V(z)$$

$$\text{car } \sum_{r=1}^1 \langle w_{kr}, y_{kr} \rangle = v_k$$

$$\text{De plus } v_k = \sum_{r=1}^1 \langle w_{kr}, y_{kr} - x \rangle + \sum_{r=1}^1 \langle w_{kr}, x \rangle.$$

Comme  $w_{kr} \in \partial f_{hr}(y_{kr})$  et  $y_{kr} \in G_{hr}(x, \eta)$

en appliquant à nouveau le théorème III.1, nous obtenons

$$| \langle w_{kr}, y_{kr} - x \rangle | \leq \| w_{kr} \| \cdot \| y_{kr} - x \| \leq M \eta.$$

Donc,  $\langle w_{kr}, y_{kr} - x \rangle \leq M \eta$ , pour tout  $r \in \bar{1}$

$$\text{par conséquent : } v_k \leq M \eta 1 + \sum_{r=1}^1 \langle w_{kr}, x \rangle$$

mais, par définition,  $\sum_{r=1}^1 w_{kr} = w_k$  ;

donc  $-v_k \geq -M \eta 1 - \langle w_k, x \rangle$  ;

$$\text{dès lors } - \sum_{k=1}^q \lambda_k v_k \geq - \sum_{k=1}^q \lambda_k M \eta 1 - \sum_{k=1}^q \lambda_k \langle w_k, x \rangle.$$



Mais  $\sum_{k=1}^q \lambda_k = 1$  et  $\sum_{k=1}^q \lambda_k w_k = 0$ ,

il reste  $-\sum_{k=1}^q \lambda_k v_k \geq -1\eta M$

et l'inégalité (5) se réduit à :  $F^* \geq (1-\epsilon)F(x) - 2\eta M$

et comme  $F^* = \min_{z \in R^n} F(z) \leq F(z)$ , pour tout  $z \in R^n$

alors  $F(x) \geq F^* \geq (1-\epsilon)F(x) - 2\eta M$  ■

Découvrons la portée de ce théorème à travers un exemple.

Considérons le problème  $\min \{F(x) : x \in R^2\}$  où  $F(x) = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$

Les paramètres sont fixés à  $\epsilon = 0$ . et  $\eta = 1$ .

Soit  $x' = (1., 1.)$

a)  $l = 1$

$F(x') = \|(1., 1.)\|_1 = 2.$

$R(x', \epsilon) = R(x', 0.) = \{1\}$

$G(x', \eta) = G(x', 1.) = \{x'\} \cup \{y : y \in B(x', 1.) \text{ et } F \text{ non différentiable en } y\}$   
 $= \{(1., 1.)\} \cup \{(1., 0.), (0., 1.)\}$

alors  $S_1(x', 1.) = \partial F(G(x', 1.))$  car  $l = 1$   
 $= \nabla F((1., 1.)) \cup \partial F(\{(1., 0.), (0., 1.)\})$   
 $= \{(1., 1.)\} \cup \{(1., 1.), (1., -1.), (-1., 1.)\}$   
 $= \{(1., 1.), (1., -1.), (-1., 1.)\}$

alors  $S(x', 0., 1.) = \text{Co}(S_1(x', 1.)) = \text{Co}(\{(1., 1.), (1., -1.), (-1., 1.)\})$

ce qui est représenté à la figure 18 p.42 .

Nous remarquons immédiatement que le vecteur nul est un élément de  $S(x', 0., 1.)$ .

Par conséquent,  $\Psi(x', 0., 1.) = -\|N_r(S(x', 0., 1.))\| = 0$  ;

autrement dit,  $x' = (1., 1.)$  est un point stationnaire.

La borne du sous-différentiel élargi  $S(x', 0., 1.)$  est  $\sqrt{2}$  puisque, pour tout sous-gradient  $s \in S(x', 0., 1.)$ ,  $\|s\| \leq \sqrt{2}$ .

Appliquons alors le théorème III.3 au point stationnaire  $x' = (1., 1.)$ , cela donne :  $(1-\epsilon)F(x') - 2\eta M \leq F^* \leq F(x')$ .

c'est-à-dire  $(1-0.) \times 2. - 2 \times 1 \times 1. \times \sqrt{2} = -0.82 \leq F^* \leq 2.$

b)  $l = 2$

$$f_{11}(x) = |x_1| \quad \text{et} \quad f_{12}(x) = |x_2|$$

$R(x', 0.) = \{1\}$ , il reste inchangé de par sa définition.

$$G_1(x', 1.) = \{x'\} \cup \{(0., 1.)\}$$

$$G_2(x', 1.) = \{x'\} \cup \{(1., 0.)\}$$

$$\begin{aligned} \text{alors } S_1(x', 1.) &= \partial f_{11}(\{(1., 1.), (0., 1.)\}) \cup \partial f_{12}(\{(1., 1.), (1., 0.)\}) \\ &= \{(1., 0.), (-1., 0.)\} \cup \{(0., 1.), (0., -1.)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } S(x', 0., 1.) &= \text{Co}(S_1(x', 1.)) \\ &= \text{Co}(\{(1., 0.), (-1., 0.), (0., 1.), (0., -1.)\}) \end{aligned}$$

Cet ensemble est représenté à la figure 23 p.44.

$$\begin{aligned} (0., 0.) \in S(x', 0., 1.) ; \text{ par conséquent, } \Psi(x', 0., 1.) &= -\| \text{Nr}(S(x', 0., 1.)) \| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $x' = (1., 1.)$  est un point stationnaire.

La borne du sous-différentiel élargi  $S(x', 0., 1.)$  est, cette fois, 1. car, pour tout sous-différentiel  $s \in S(x', 0., 1.)$ ,  $\|s\| \leq 1$ .

Appliquons alors le théorème III.3 au point stationnaire  $x' = (1., 1.)$ , cela donne :

$$(1 - \varepsilon)F(x') - 2 \ln M \leq F^* \leq F(x')$$

$$\text{c'est-à-dire } (1 - 0.) \times 2. - 2 \times 2 \times 1. \times 1. = -2. \leq F^* \leq 2.$$

Dans les deux cas,  $l = 1$  et  $l = 2$ , grâce au théorème III.3, nous obtenons des valeurs qui bornent la valeur optimale de la fonction à l'aide de la valeur de la fonction au point stationnaire  $x' = (1., 1.)$ .

Cependant, avec les mêmes paramètres déterminant le sous-différentiel élargi, les approximations ont été :

\* dans le cas  $l = 1$  :  $-0.82 \leq F^* \leq 2$ .

c'est-à-dire quand la fonction à minimiser n'est pas subdivisée en une somme de plusieurs fonctions LFS.

\* dans le cas  $l = 2$  :  $-2. \leq F^* \leq 2$ .

c'est-à-dire quand la fonction à minimiser est exprimée comme la somme de deux fonctions LFS.

Dans le cas simple de l'exemple, il est aisé de voir que la valeur optimale de la fonction  $F(x) = \|x\|_1$  est 0. Ainsi, cela permet de constater que dans le cas où chacune des fonctions  $f_i$  est déjà LFS (c'est-à-dire qu'il n'est plus indispensable de les décomposer en la somme de  $l > 1$  fonctions  $f_{ij}$  LFS), nous obtenons de meilleures bornes sur la valeur optimale de la fonction en choisissant pour le paramètre  $l$  la valeur 1.

Cette conclusion peut être obtenue de façon théorique.

Reprenons, pour cela, les rapports entre les fonctions  $f_i$  qui définissent la fonction  $F$  à minimiser :  $F(x) = \max \{ f_i(x) : i \in \bar{p} \}$  et les  $l$  fonctions  $f_{ij}$  qui sont chacune LFS et vérifient

$$f_i = \sum_{j=1}^l f_{ij}$$

De même, grâce au théorème II.8, tout sous-gradient  $s_i$ , élément du sous-différentiel de la fonction  $f_i$  au point  $x$ , se décompose en une somme de sous-gradients des fonctions  $f_{ij}$  au point  $x$ , c'est-à-dire

pour tout  $i \in \bar{p}$ ,  $s_i \in \partial f_i(x)$ , alors  $s_i = \sum_{j=1}^l s_{ij}$  avec  $s_{ij} \in \partial f_{ij}(x)$ ,  $\forall j \in \bar{l}$ .

Si  $M$  est la borne de tout sous-gradient de la fonction  $f_{ij}$ ,  $j \in \bar{l}$  et  $M_1$  celle des sous-gradients des fonctions  $f_i$ ,  $i \in \bar{p}$

alors  $\|s_i\| = \left\| \sum_{j=1}^l s_{ij} \right\| \leq l.M$  donc  $M_1 \leq l.M$

Soit  $x$  un point stationnaire de l'ensemble  $X$  compact non vide de  $R^n$ , en appliquant le théorème III.3, nous obtenons

$$(1-\varepsilon)F(x) - 2 l \eta M_1 \leq F^* \leq F(x) \quad \text{si } l = 1$$

$$(1-\varepsilon)F(x) - 2 l \eta M \leq F^* \leq F(x) \quad \text{si } l > 1$$

Mais  $M_1 \leq l.M$ , par conséquent, nous avons

$$(1-\varepsilon)F(x) - 2 l \eta M \leq (1-\varepsilon)F(x) - 2 l \eta M_1 \leq F^* \leq F(x)$$

c'est-à-dire que la borne inférieure est plus précise dans le cas  $l = 1$ .

C'est pourquoi, en général, s'il n'est pas nécessaire de décomposer les fonctions  $f_i$  en une somme de fonctions  $f_{ij}$  LFS, car elles sont déjà elles-mêmes des fonctions LFS, le théorème III.3 fournit de meilleures bornes de la valeur optimale de la fonction. Par contre, le fait de considérer chacune des fonctions  $f_{ij}$  comme une somme de  $l > 1$  fonctions  $f_{ij}$  LFS, plus simples à traiter, peut simplifier la tâche dans le calcul des  $S_i(x, \eta)$  et finalement donc dans celui de  $S(x, \varepsilon, \eta)$ . Nous pouvons percevoir ici les compromis indispensables entre, d'une part, la précision et, d'autre part, la facilité d'exécution.



### III.4.2. Existence d'une direction de descente

---

Nous avons considéré jusqu'ici le cas d'un point stationnaire c'est-à-dire lorsque la fonction auxiliaire  $\psi$  s'annule. Il reste à traiter le cas où la fonction  $\psi$  prend des valeurs négatives. Lorsque le point  $x$  n'est pas un point stationnaire, il est possible de trouver encore une direction de descente en ce point pour la fonction à minimiser. C'est ce que démontre le théorème qui suit.

#### Théorème III.4

*Si  $\psi(x, \varepsilon, \eta) < 0$  alors il existe une direction de descente non triviale pour  $F$  au point  $x$ .*

#### démonstration

■ Soit un point  $x$  tel que  $\psi(x, \varepsilon, \eta) < 0$ .

Par définition de la fonction auxiliaire ,

$$\psi(x, \varepsilon, \eta) = \min \left\{ \max \{ \langle g, d \rangle : d \in S(x, \varepsilon, \eta) \} : \|g\| \leq 1 \right\}$$

Puisque les ensembles  $S(x, \varepsilon, \eta)$  et la boule euclidienne unité sont des ensembles convexes, compacts, non vides et que le produit scalaire est continu en utilisant le corollaire 37.3.2 de [12], nous pouvons encore écrire

$$\psi(x, \varepsilon, \eta) = \max \left\{ \min \{ \langle g, d \rangle : \|g\| \leq 1 \} : d \in S(x, \varepsilon, \eta) \right\}$$

Or toute fonction continue sur un compact atteint ses bornes, par conséquent, il existe un vecteur  $g_0$  dans la boule euclidienne unité pour lequel

$$\psi(x, \varepsilon, \eta) = \max \{ \langle g_0, d \rangle : d \in S(x, \varepsilon, \eta) \}$$

Par une propriété de la dérivée directionnelle généralisée (théorème II.7), nous savons que  $F'(x; y) = \max \{ \langle y, z \rangle : z \in \partial F(x) \}$

ce qui donnera pour la dérivée directionnelle dans la direction  $g_0$

$$F'(x; g_0) = \max \{ \langle g_0, d \rangle : d \in \partial F(x) \}$$

De plus nous connaissons la propriété III.3.1 :  $\partial F(x) \subseteq S(x, \varepsilon, \eta)$ ,

alors  $\max \{ \langle g_0, d \rangle : d \in \partial F(x) \} \leq \max \{ \langle g_0, d \rangle : d \in S(x, \varepsilon, \eta) \}$



Par conséquent  $F'(x;g_0) \leq \psi(x,\varepsilon,\eta) < 0$

Dès lors  $F'(x;g_0) < 0$  ce qui signifie que  $g_0$  est une direction de descente.

De plus, cette direction de descente  $g_0$  est non triviale

car si  $g_0=0$  alors  $\psi(x,\varepsilon,\eta) = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse. ■

Ainsi le sous-différentiel élargi a permis de caractériser une direction de descente grâce à la fonction auxiliaire  $\psi$ . Il ne reste donc qu'à combiner tous ces éléments pour en faire un algorithme de minimisation de fonctions convexes, propres et continues  $F = \max \{ f_i : i \in \bar{p} \}$  ( où les  $f_i$  ne sont pas nécessairement différentiables mais LFS ) convergent vers un point stationnaire.

## CHAPITRE IV

## ALGORITHME ET CONVERGENCE

Afin de résoudre le problème  $\min_{x \in R^n} F(x)$

où  $F(x) = \max \{ f_i(x) : i \in \bar{p} \}$  et  $f_i = \sum_{j=1}^1 f_{ij}$ , pour tout  $i \in \bar{p}$

et où les fonctions  $f_i$  sont convexes mais non nécessairement différentiables, J.Chatelon, D.W.Hearn et T.J.Lowe ont proposé un algorithme dont nous étudierons la convergence vers une solution  $\varepsilon$ -optimale.

#### IV.1. Algorithme de Dem'yanov modifié par Chatelon, Hearn et Lowe

\* Etape 0 \* Fixer les paramètres  $\varepsilon$  et  $\eta$ .

Choisir un point de départ  $x_0$ .

Poser  $k=0$  et aller à l'étape 1.

\* Etape 1 \* Calculer  $F(x_k)$ ,  $R(x_k, \varepsilon)$ ,  $S(x_k, \varepsilon, \eta)$  et  $\psi(x_k, \varepsilon, \eta)$ .

Aller à l'étape 2.

\* Etape 2 \* - Si  $\psi(x_k, \varepsilon, \eta) = 0$ , STOP.

En effet, par la définition de  $\psi$ ,  $x_k$  est un point stationnaire et le théorème III.3 nous fournit une approximation de la valeur minimale  $F^*$  de la fonction  $F$ .

- Si  $\psi(x_k, \varepsilon, \eta) < 0$ , par le théorème III.4, nous avons établi qu'il existe une direction de descente  $g_k$  pour laquelle nous avons  $\psi(x_k, \varepsilon, \eta) = \max \{ \langle d, g_k \rangle : d \in S(x_k, \varepsilon, \eta) \}$ .

En fait,  $g_k = \frac{-d_0}{\|d_0\|}$  où  $d_0 = \text{Nr}(S(x_k, \varepsilon, \eta))$ .

Nous résolvons ensuite la recherche unidimensionnelle pour trouver  $t_k$  tel que  $F(x_k + t_k g_k) = \min_{t \geq 0} F(x_k + t g_k)$

Nous posons alors  $x_{k+1} = x_k + t_k g_k$  et  $k = k + 1$  avant de passer à l'étape 1.

#### IV.2. Preuve de la convergence de l'algorithme

Supposons qu'il existe un certain  $x_0$  tel que l'ensemble niveau  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \leq F(x_0)\}$  soit borné.

Grâce au théorème II.3, la fonction  $F$  est convexe car c'est le maximum d'un nombre fini de fonctions convexes et, par le théorème II.4,  $F$  est continue.

Par conséquent la valeur minimale  $F^*$  de la fonction  $F$  est atteinte en un point  $x^*$  de  $X$ .

Voici quelle sera la démarche pour établir la convergence de l'algorithme.

Supposons que le point  $x_0$  est le point de départ de l'algorithme.

L'algorithme génère une suite de points  $x_k$  de  $X$

car  $F(x_{k+1}) < F(x_k) \leq F(x_0)$  puisque si  $\psi(x_k, \varepsilon, \eta) < 0$ , il existe une direction de descente non triviale pour  $F$  en  $x_k$ .

Si l'algorithme se termine en une certaine itération  $k$ , le théorème III.3 fournit une estimation de  $F^*$ .

Dans le cas contraire, puisque la suite  $\{x_k\}$  est incluse dans  $X$  qui est un ensemble borné, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite  $\{x_k\}$  admet au moins une valeur d'adhérence  $x' \in X$ .

Par définition, la suite  $\{x_k\}$  admet une valeur d'adhérence  $x'$  si et seulement si il existe une sous-suite de  $\{x_k\}$  convergente vers  $x'$ .

Notons  $K \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$  l'ensemble des indices de cette sous-suite c'est-à-dire  $\{x_k\}_{k \in K}$  converge vers  $x'$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .

Nous allons montrer par contradiction que  $x'$  est un point stationnaire c'est-à-dire prouver que  $\psi(x', \varepsilon, \eta) = 0$ .

Supposons donc, par l'absurde, que  $\psi(x', \varepsilon, \eta) = -b < 0$ .  
 Nous allons tout d'abord établir que, pour  $k$  suffisamment grand,  $\psi(x_k, \varepsilon, \eta)$  est uniformément négatif. Démontrons, pour cela, quelques théorèmes préliminaires.

#### Théorème IV.1

Il existe un entier  $N_1$  tel que  
 si  $k \in K$  et  $k > N_1$ , alors  $R(x_k, \varepsilon) \subseteq R(x', \varepsilon)$

#### démonstration

■ Par le résultat établi [4, p.92], nous avons

$$\exists \varepsilon', 0 < \varepsilon < \varepsilon' \text{ tel que } R(x', \varepsilon) = R(x', \varepsilon').$$

Puisque les fonctions  $f_i$  et  $F$  sont continues et que  $F$  est supposée positive, nous avons, pour tout  $i \in \bar{p}$

$$\exists N_1' \text{ tel que si } k \in K \text{ et } k > N_1' \text{ alors } |f_i(x_k) - f_i(x')| < (\varepsilon' - \varepsilon) \frac{F(x')}{2}$$

et de même

$$\exists N_1'' \text{ tel que si } k \in K \text{ et } k > N_1'' \text{ alors } |F(x_k) - F(x')| < (\varepsilon' - \varepsilon) \frac{F(x')}{2(1 - \varepsilon)}$$

Lorsque nous choisissons  $k \in K$ , tel que  $k > N_1 = \max(N_1', N_1'')$ , nous pouvons déduire des deux assertions précédentes

$$F(x') - \frac{(\varepsilon' - \varepsilon) F(x')}{2(1 - \varepsilon)} < F(x_k)$$

$$\text{et } f_i(x_k) < f_i(x') + \frac{(\varepsilon' - \varepsilon) F(x')}{2}.$$

Par conséquent, nous écrivons

$$(1 - \varepsilon) F(x') - (\varepsilon' - \varepsilon) \frac{F(x')}{2} < (1 - \varepsilon) F(x_k) \leq f_i(x_k) \text{ lorsque } i \in R(x_k, \varepsilon).$$

Donc pour ces indices  $i$  particuliers,

$$(1 - \varepsilon) F(x') - (\varepsilon' - \varepsilon) \frac{F(x')}{2} < f_i(x') + \frac{(\varepsilon' - \varepsilon)}{2} F(x')$$

$$\text{c'est-à-dire } (1 - \varepsilon') F(x') < f_i(x')$$

ce qui signifie, par définition,  $i \in R(x', \varepsilon')$ .

Utilisons le résultat démontré dans [4, p.92],

$$\exists \varepsilon', 0 < \varepsilon < \varepsilon' \text{ tel que } R(x', \varepsilon) = R(x', \varepsilon')$$



Donc lorsque nous choisissons un indice  $i$  dans  $R(x_k, \varepsilon)$ , nous venons d'établir que  $i$  est alors un élément de  $R(x', \varepsilon')$ , donc de  $R(x', \varepsilon)$  lorsque  $k \in K$  et  $k > N_1$ , c'est-à-dire

$$R(x_k, \varepsilon) \subseteq R(x', \varepsilon) \quad \text{où } k \in K \text{ et } k > N_1. \quad \blacksquare$$

#### Théorème IV.2

Soit  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction LFS,  $\{x_k\}_{k \in K}$  une suite convergente

de limite  $x'$ , alors pour tout  $\gamma > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que  $\partial g(G(x_k, \eta)) \subseteq \partial g(G(x', \eta)) + \gamma B$  pour tout  $k \geq N$  et  $k \in K$ .

#### démonstration

■ Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , nous définissons  $G'(x, \eta) = G(x, \eta) \setminus \{x\}$  c'est-à-dire  $G(x, \eta) = G'(x, \eta) \cup \{x\}$ .

Nous utilisons le corollaire 24.5.1 de [12] pour affirmer que

$$\exists N' \text{ tel que pour tout } k \geq N' \text{ et } k \in K, \quad \partial g(x_k) \subseteq \partial g(x') + \gamma B.$$

Nous définissons à l'aide de  $G'(x_k, \eta)$  l'ensemble

$$H(s) = \bigcup \{ \partial g(G'(x_k, \eta)) : k \geq s, k \in K \} \quad s=1,2,\dots$$

$$\text{ou encore } H(s) = \partial g \left( \bigcup \{ G'(x_k, \eta) : k \geq s, k \in K \} \right) \quad s=1,2,\dots$$

Cet ensemble vérifie la propriété suivante :  $H(s_1) \subseteq H(s_2)$  lorsque  $s_2 < s_1$ .

Considérons à présent les deux alternatives :

\*\* soit  $H(p) = \emptyset$  pour  $p \geq N'$ .

Donc  $\partial g(G'(x_k, \eta)) = \emptyset$ , pour tout  $k \geq p$  ;

par conséquent  $G'(x_k, \eta) = \emptyset$ , pour tout  $k \geq p \geq N'$

c'est-à-dire  $G(x_k, \eta) = \{x_k\}$ , pour tout  $k \geq N'$

donc  $\partial g(G(x_k, \eta)) = \partial g(\{x_k\}) \subseteq \partial g(x') + \gamma B$

$$\subseteq \partial g(G(x', \eta)) + \gamma B, \text{ pour tout } k \geq N', k \in K$$

dans ce cas le théorème est donc démontré.

\*\* soit  $H(p) \neq \emptyset$  pour  $p \geq N'$ .

Puisque la suite  $\{x_k\}_{k \in K}$  converge vers  $x'$ , l'ensemble

$U \{ G'(x_k, \eta) : k \geq p \text{ et } k \in K \}$  est contenu dans une boule euclidienne bornée et fermée.

Or par hypothèse,  $g$  est une fonction LFS ,

donc  $\partial g( U \{ G'(x_k, \eta) : k \geq p \text{ et } k \in K \} ) = H(p)$  est l'union d'un nombre fini de sous-différentiels distincts, pour tout  $p=1,2,\dots$

Etant donné que nous considérons le cas où  $H(p) \neq \emptyset$ , bien que nous ayons un nombre infini d'ensembles  $H(p)$  dans la suite, il n'y aura qu'un nombre fini de sous-différentiels distincts, soient  $S^r$ ,  $r \in \bar{q}$  et chacun se présente donc une infinité de fois dans la suite c'est-à-dire  $\exists N''$  tel que  $H(p) \subseteq U \{ S^r : r \in \bar{q} \}$ , pour tout  $p \geq N''$ .

Par conséquent, il est possible de déterminer  $q$  ensembles d'indices  $K_r$ ,  $r \in \bar{q}$  où chaque  $K_r$  est un sous-ensemble de  $K$ , de cardinal infini,

et  $S^r = \partial g(y_k)$  pour  $y_k \in G'(x_k, \eta)$ , pour tout  $k \in K_r$ .

( Intuitivement, sont regroupés dans  $K_r$  les indices de tous les éléments  $y_k$  qui sont dans un voisinage  $G'(x_k, \eta)$  pour  $k \in K_r$  et qui ont le même sous-différentiel  $S^r$  )

Pour un  $r$  fixé, puisque la suite  $\{x_k\}_{k \in K}$  est convergente,

la suite  $\{y_k\}_{k \in K_r}$  est incluse dans un ensemble compact et possède une valeur d'adhérence  $y_r'$ .

Par définition d'une valeur d'adhérence, il existe une sous-suite de  $\{y_k\}_{k \in K_r}$  qui converge vers  $y_r'$ ,

c'est-à-dire  $\{y_k\}_{k \in K_r'}$  converge vers  $y_r'$  quand  $k \rightarrow +\infty$  et  $K_r' \subseteq K_r$ .

Or nous savons que  $x_k$  converge vers  $x'$ ,  $y_k \in G'(x_k, \eta)$  et

$y_k$  converge vers  $y_r'$  pour  $k \in K_r'$  et  $k \rightarrow +\infty$ .

Par conséquent  $y_{r'} \in B(x', \eta)$ .

Si nous nous référons à nouveau au corollaire 24.5.1 de [12], nous pouvons écrire si  $\varepsilon' > 0$ ,  $\exists N_r \geq N''$  tel que  $\partial g(y_k) \subseteq \partial g(y_{r'}) + \varepsilon' B$ ,  $\forall k \in K_{r'}$ ,  $k \geq N_r$ .

Or  $S^r = \partial g(y_k)$ , pour tout  $k \in K_r$

donc  $S^r = \partial g(y_k)$ , pour tout  $k \in K_{r'}$

par conséquent,  $S^r \subseteq \partial g(y_{r'}) + \varepsilon' B$ , pour tout  $\varepsilon' > 0$ ,

c'est-à-dire  $S^r \subseteq \partial g(y_{r'})$ .

Puisque  $S^r = \partial g(y_k)$  pour  $y_k \in G'(x_k, \eta)$ , pour tout  $k \in K_r$ ,

$S^r$  n'est donc pas un singleton.

Nous savons également que  $S^r \subseteq \partial g(y_{r'})$ , de ce fait  $g$  n'est pas différentiable en  $y_{r'}$  et puisque  $y_{r'} \in B(x', \eta)$ , nous avons  $y_{r'} \in G'(x', \eta)$ .

Nous pouvons donc déduire que  $S^r \subseteq \partial g(G'(x', \eta))$ .

Donc prenant  $p \geq N''' = \max \{ N_r : r \in \bar{q} \}$

nous obtenons  $H(p) \subseteq \bigcup \{ S^r : r \in \bar{q} \} \subseteq \partial g(G'(x', \eta))$ .

Par définition de  $H(p)$ , nous avons aussi  $\partial g(G'(x_k, \eta)) \subseteq H(p) \quad \forall k \in K, k \geq p$ .

Définissons  $N = \max \{ N', N''' \}$ ,

nous avons établi les résultats suivants :

$$* \quad \forall k \geq N', k \in K, \quad \partial g(x_k) \subseteq \partial g(x') + \gamma B$$

$$* \quad \forall p \geq N''', \quad H(p) \subseteq \partial g(G'(x', \eta))$$

$$* \quad \forall k \geq p, \quad \partial g(G'(x_k, \eta)) \subseteq H(p)$$

donc pour tout  $k \geq N$ ,

$$\partial g(G'(x_k, \eta)) \cup \partial g(x_k) \subseteq \partial g(G'(x', \eta)) \cup \partial g(x') + \gamma B$$

c'est-à-dire  $\forall k \in K, k \geq N, \quad \partial g(G(x_k, \eta)) \subseteq \partial g(G(x', \eta)) + \gamma B$

Théorème IV.3

Pour tout  $\varepsilon' > 0$ , il existe  $N_2$  tel que si  $k \in K$  et  $k > N_2$ ,  
alors  $S(x_k, \varepsilon, \eta) \subseteq S(x', \varepsilon, \eta) + \varepsilon'B$

démonstration

■ Par définition,  $S_i(x_k, \eta) = \sum_{j=1}^1 \partial f_{ij}(G_{ij}(x_k, \eta)) \quad \forall i \in R(x', \varepsilon)$ .

Puisque les fonctions  $f_{ij}$  sont LFS par hypothèse du problème et que  $\{x_k\}_{k \in K}$  converge vers  $x'$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , par le théorème IV.2, nous obtenons

$$\exists N_{2i} \text{ tel que } \forall k \in K, k \geq N_{2i}, \partial f_{ij}(G_{ij}(x_k, \eta)) \subseteq \partial f_{ij}(G_{ij}(x', \eta)) + \frac{\varepsilon'B}{1}$$

donc  $S_i(x_k, \eta) \subseteq S_i(x', \eta) + \varepsilon'B, \forall k \in K, k \geq N_{2i}$  et  $\forall i \in R(x', \varepsilon)$ .

Définissons  $N_2' = \max \{N_{2i} : i \in R(x', \varepsilon)\}$

alors  $\forall k \in K, k \geq N_2'$

$$U \{S_i(x_k, \eta) : i \in R(x', \varepsilon)\} \subseteq U \{S_i(x', \eta) : i \in R(x', \varepsilon)\} + \varepsilon'B$$

par conséquent,  $\forall k \in K, k \geq N_2'$

$$\text{Co} ( U \{S_i(x_k, \eta) : i \in R(x', \varepsilon)\} ) \stackrel{(1)}{\subseteq} \text{Co} ( U \{S_i(x', \eta) : i \in R(x', \varepsilon)\} ) + \varepsilon'B$$

D'autre part, nous savons, grâce au théorème IV.1, que

$$\exists N_1 \text{ tel que pour } k \in K \text{ et } k > N_1, \text{ nous avons } R(x_k, \varepsilon) \subseteq R(x', \varepsilon).$$

Par conséquent, pour  $k > N_1$

$$S(x_k, \varepsilon, \eta) = \text{Co} ( U \{S_i(x_k, \eta) : i \in R(x_k, \varepsilon)\} ) \stackrel{(2)}{\subseteq} \text{Co} ( U \{S_i(x_k, \eta) : i \in R(x', \varepsilon)\} )$$

Des assertions (1) et (2), nous concluons

$$\forall k \in K, k > N_2 = \max \{N_1, N_2'\}$$

$$S(x_k, \varepsilon, \eta) \subseteq S(x', \varepsilon, \eta) + \varepsilon'B$$

■



Les trois théorèmes précédents vont nous permettre d'établir la négativité uniforme de  $\psi(x_k, \varepsilon, \eta)$ .

#### Théorème IV.4

Il existe  $N_2$  tel que si  $k \in K$  et  $k > N_2$   
alors  $\psi(x_k, \varepsilon, \eta) \leq \frac{-b}{2} < 0$ .

#### démonstration

■ Par le théorème IV.3, nous avons

$\forall \varepsilon' > 0, \exists N_2$  tel que pour  $k \in K, k > N_2, S(x_k, \varepsilon, \eta) \subseteq S(x', \varepsilon, \eta) + \varepsilon'B$

Puisque  $\varepsilon'$  est arbitraire, prenons-le tel que  $\varepsilon' \leq \frac{b}{2}$ ,

alors  $\forall g$  tel que  $\|g\| \leq 1$  et  $k > N_2$ ,

$$\max \{ \langle d, g \rangle : d \in S(x_k, \varepsilon, \eta) \} \leq \max \{ \langle d, g \rangle : d \in S(x', \varepsilon, \eta) + \varepsilon'B \}$$

$$\text{Or } \psi(x_k, \varepsilon, \eta) = \min \{ \max \{ \langle g, d \rangle : d \in S(x_k, \varepsilon, \eta) \} : \|g\| \leq 1 \}$$

par conséquent,  $\psi(x_k, \varepsilon, \eta) \leq \min \{ \max \{ \langle g, d \rangle : d \in S(x', \varepsilon, \eta) \} : \|g\| \leq 1 \} + \varepsilon'$

$$\leq \psi(x', \varepsilon, \eta) + \varepsilon'$$

$$\leq \psi(x', \varepsilon, \eta) + \frac{b}{2} \leq -b + \frac{b}{2} = \frac{-b}{2} < 0. \quad \blacksquare$$

#### Théorème IV.5

Soit  $F$  une fonction convexe définie sur  $\mathbb{R}^n$ ,  
soient les suites  $\{x_k\}$  et  $\{g_k\}$  satisfaisant

$$F(x_{k+1}) \leq F(x_k + tg_k) \text{ pour } 0 \leq t \leq T$$

$$\{g_k\} \text{ converge vers } g' \text{ pour } k \rightarrow +\infty$$

$$\{x_k\} \text{ converge vers } x' \text{ pour } k \rightarrow +\infty$$

alors  $F'(x'; g') \geq 0$ .

démonstration

■ Par définition,  $F'(x';g') = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{F(x'+tg') - F(x')}{t}$

Puisque  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\forall t \in [0,1]$

$$F(x'+tg') = \lim_{k \rightarrow +\infty} F(x_k + tg_k) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} F(x_{k+1})$$

par conséquent,  $F(x'+tg') \geq F(x')$ .

Nous concluons donc  $F'(x';g') \geq 0$ , par définition. ■

Théorème IV.6

Il existe  $N_3$  tel que si  $k > N_3$  et  $k \in K$   
alors  $R(x', 0) \subseteq R(x_k, \varepsilon)$

démonstration

■ Soit  $i \in R(x', 0)$  c'est-à-dire  $f_i(x') = F(x')$  et soit  $\varepsilon > 0$ ,  
puisque les fonctions  $f_i$  sont continues et que  $F$  est supposée positive,

$$\exists N'_{3i} \text{ tel que } \forall k \in K, k > N'_{3i}, |f_i(x') - f_i(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} F(x')$$

car  $\{x_k\}_{k \in K}$  converge vers  $x'$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .

De même, par continuité de  $F$ ,

$$\exists N_3'' \text{ tel que } \forall k \in K, k > N_3'', |F(x') - F(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} F(x')$$

Donc  $\forall k \in K, k > N_3 = \max \{N_3'', N'_{3i} \text{ où } i \in R(x', 0)\}$

nous avons  $f_i(x_k) > f_i(x') - \frac{\varepsilon}{2} F(x') = F(x') - \frac{\varepsilon}{2} F(x')$  puisque  $i \in R(x', 0)$

$$\text{et } -F(x_k) > -F(x') - \frac{\varepsilon}{2} F(x')$$

En additionnant ces inégalités,

$$f_i(x_k) - F(x_k) > -\varepsilon F(x') \geq -\varepsilon F(x_k) \quad \text{car } F(x') \leq F(x_k)$$

par conséquent,  $f_i(x_k) \geq F(x_k) - \varepsilon F(x_k)$  c'est-à-dire  $i \in R(x_k, \varepsilon)$ . ■

Théorème IV.7

Pour tout  $\varepsilon' > 0$ , pour tout  $i \in R(x', 0)$  et pour tout  $s \in \partial f_i(x')$   
 il existe  $L_i$  tel que pour tout  $k > L_i$  et  $k \in K$   
 nous pouvons trouver  $s' \in S(x_k, \varepsilon, \eta)$   
 tel que  $s = s' + t$  et  $\|t\| < \varepsilon'$ .

démonstration

■ Utilisant le théorème II.8 et le fait que  $\sum_{j=1}^1 f_{ij} = f_i$ ,  
 nous obtenons  $s = \sum_{j=1}^1 s_j$ ,  $s_j \in \partial f_{ij}(x')$  quand  $s \in \partial f_i(x')$ .

Pour tout  $j \in \bar{I}$ , deux cas peuvent se présenter :

soit  $f_{ij}$  est différentiable en  $x'$ .

soit  $f_{ij}$  est non différentiable en  $x'$ .

a) Supposons que  $f_{ij}$  est différentiable en  $x'$

donc  $s_j = \nabla f_{ij}(x')$  et  $\partial f_{ij}(x') = \{ \nabla f_{ij}(x') \}$

Par le corollaire 24.5.1 de [12],

$\forall \varepsilon' > 0$ ,  $\exists L_{ij}$  tel que  $k \in K$  et  $k > L_{ij}$ ,  $\partial f_{ij}(x_k) \subseteq \partial f_{ij}(x') + \frac{\varepsilon'}{1} B$

mais puisque  $\partial f_{ij}(x') = \{ \nabla f_{ij}(x') \} = \{ s_j \}$

alors  $\exists s_j' \in \partial f_{ij}(x_k) \subseteq \partial f_{ij}(G_{ij}(x_k, \eta))$

tel que  $s_j = s_j' + t_j$  où  $\|t_j\| < \frac{\varepsilon'}{1}$

b) Supposons que  $f_{ij}$  n'est pas différentiable en  $x'$ .

Puisque  $\{x_k\}_{k \in K}$  converge vers  $x'$  quand  $k \rightarrow +\infty$ ,

pour  $k$  suffisamment grand dans  $K$ ,  $k > L_{ij}$ ,  $x' \in B(x_k, \eta)$ .

Puisque  $f_{ij}$  n'est pas différentiable en  $x'$ ,  $x' \in G_{ij}(x_k, \eta)$ .

Donc, pour  $k > L_{ij}$ , si  $s_j \in \partial f_{ij}(x')$  alors  $s_j \in \partial f_{ij}(G_{ij}(x_k, \eta))$ .

Par conséquent  $s_j = s_j' + t_j$  où  $s_j = s_j'$  et  $t_j = 0$ .

Choisissons  $k > L_i' = \max \{ L_{ij} : j \in \bar{I} \}$

$$\text{alors } s = \sum_{j=1}^1 s_j = \sum_{j=1}^1 (s_j' + t_j) = \sum_{j=1}^1 s_j' + \sum_{j=1}^1 t_j$$

où  $s_j' \in \partial f_{ij}(G_{ij}(x_k, \eta))$  et  $\|t_j\| < \frac{\varepsilon'}{1}$  si  $j \in \bar{I}$

$$\text{Nous posons } s' = \sum_{j=1}^1 s_j' \text{ et } t = \sum_{j=1}^1 t_j$$

par conséquent  $s' \in \sum_{j=1}^1 \partial f_{ij}(G_{ij}(x_k, \eta)) = S_i(x_k, \eta)$  où  $i \in R(x', 0)$

$$\text{et } \|t\| = \left\| \sum_{j=1}^1 t_j \right\| < \varepsilon'$$

D'autre part, par le théorème IV.6 ,

$\exists N_3$  tel que  $\forall k > N_3, k \in K, R(x', 0) \subseteq R(x_k, \varepsilon)$ .

Donc pour  $k > L_i = \max \{ L_i', N_3 \}$

nous obtenons  $S_i(x_k, \eta) \subseteq S(x_k, \varepsilon, \eta)$  donc  $s' \in S(x_k, \varepsilon, \eta)$ . ■

Nous arrivons à présent au théorème fondamental qui nous permet d'affirmer que l'algorithme convergera toujours vers un point stationnaire.

#### Théorème IV.8

Toute valeur d'adhérence  $x'$  d'une suite générée par l'algorithme est stationnaire.

#### démonstration

■ Considérons la suite des sous-gradients  $\{g_k\}_{k \in K}$  définie par

$$\psi(x_k, \varepsilon, \eta) = \max \{ \langle d, g_k \rangle : d \in S(x_k, \varepsilon, \eta) \}$$



Puisque la suite  $\{g_k\}_{k \in K}$  est contenue dans un borné, la boule euclidienne unité  $B$ , elle admet au moins une valeur d'adhérence  $g' \in B$ , grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass.

Nous avons donc deux suites  $\{x_k\}_{k \in K}$  convergente vers  $x'$

$\{g_k\}_{k \in K'}$  convergente vers  $g'$ ,  $K' \subseteq K$ .

Par le théorème II.7,  $F'(x'; g') = \max \{ \langle d, g' \rangle : d \in \partial F(x') \}$

c'est-à-dire, puisque le maximum est atteint sur le compact  $\partial F(x')$  et par

définition de  $\partial F(x')$ ,  $F'(x'; g') = \langle \sum_i \lambda_i s_i, g' \rangle$

avec  $\sum_i \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $s_i \in \partial f_i(x')$ ,  $i \in R(x', 0)$ .

Le théorème IV.7 nous permet d'écrire

$\forall \varepsilon' > 0 \exists L_i$  tel que  $\forall k > L_i : \exists s_i' \in S(x_k, \varepsilon, \eta)$

tel que  $s_i = s_i' + t_i$  et  $\|t_i\| < \varepsilon'$ .

Posant  $k > N_4 = \max_i \{L_i\}$ ,  $k \in K$ , nous avons

$$\begin{aligned} F'(x'; g') &= \langle \sum_i \lambda_i s_i', g' \rangle + \langle \sum_i \lambda_i t_i, g' \rangle \\ &= \langle \sum_i \lambda_i s_i', g_k \rangle + \langle \sum_i \lambda_i s_i', g' - g_k \rangle + \langle \sum_i \lambda_i t_i, g' \rangle \end{aligned}$$

Or, par la convexité de  $S(x_k, \varepsilon, \eta)$ ,  $\sum_i \lambda_i s_i' \in S(x_k, \varepsilon, \eta)$

alors  $\langle \sum_i \lambda_i s_i', g_k \rangle \leq \max \{ \langle d, g_k \rangle : d \in S(x_k, \varepsilon, \eta) \}$

et à fortiori  $\langle \sum_i \lambda_i s_i', g_k \rangle \leq \min \{ \max \{ \langle d, g_k \rangle : d \in S(x_k, \varepsilon, \eta) \} : \|g_k\| \leq 1 \}$

Par conséquent, par définition,  $\langle \sum_i \lambda_i s_i', g_k \rangle \leq \psi(x_k, \varepsilon, \eta)$ .

Utilisons le théorème IV.4,

$\exists N_2$  tel que  $\forall k \in K, k > N_2 : \psi(x_k, \varepsilon, \eta) \leq \frac{-b}{2} < 0$ .

Donc si  $k > N_2 : \langle \sum_i \lambda_i s_i', g_k \rangle \leq \frac{-b}{2}$ .

Posons  $k > \max \{N_2, N_4\}$

d'où  $F'(x'; g') \leq \frac{-b}{2} + \langle \sum_i \lambda_i s_i', g' - g_k \rangle + \langle \sum_i \lambda_i t_i, g' \rangle,$

mais puisque  $\{g_k\}_{k \in K'}$  converge vers  $g'$  quand  $k \rightarrow +\infty$

$\exists N_5$  tel que  $k > N_5$  et  $k \in K'$ ,  $\|g_k - g'\| \leq \frac{b}{8M}$

$$\begin{aligned} \text{Par conséquent } \langle \sum_i \lambda_i s_i', g' - g_k \rangle &\leq \left\| \sum_i \lambda_i s_i' \right\| \cdot \|g' - g_k\| \\ &\leq \frac{M \cdot b}{8 \cdot M} = \frac{b}{8} \end{aligned}$$

où  $M$  est la borne du sous-différentiel élargi.

Choisissons  $0 < \varepsilon' < \frac{b}{8}$  de sorte que

$$\langle \sum_i \lambda_i t_i, g' \rangle \leq \left\| \sum_i \lambda_i t_i \right\| \cdot \|g'\| \leq \varepsilon'$$

car  $\|t_i\| < \varepsilon'$  et  $g' \in B$ .

$$\text{Donc } F'(x'; g') \leq \frac{-b}{2} + \frac{b}{8} + \varepsilon' < \frac{-b}{2} + \frac{b}{8} + \frac{b}{8} = \frac{-b}{4} < 0. \quad (1)$$

Appliquons le théorème IV.5 avec les sous-suites  $\{x_k\}_{k \in K'}$  et  $\{g_k\}_{k \in K'}$

et  $T = +\infty$ , nous obtenons  $F'(x'; g) \geq 0$

ce qui est en contradiction avec l'assertion (1) que nous venons d'établir.

Par conséquent, la supposition initiale  $\psi(x', \varepsilon, \eta) = -b < 0$ , dont nous avons déduit ce qui précède, est fausse

donc  $\psi(x', \varepsilon, \eta) = 0$

c'est-à-dire  $x'$  est un point stationnaire. ■

## CHAPITRE V

## APPLICATION DE L'ALGORITHME

Nous expliquons maintenant la façon dont nous avons implémenté sur ordinateur l'algorithme proposé au chapitre IV. Nous citons également quelques exemples traités par notre programme.

### V.1. Mise au point du programme.

Sans reprendre en détails les hypothèses du problème que nous traitons, rappelons que pour résoudre

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) \quad \text{où} \quad F(x) = \max \{ f_i(x) : i \in \bar{p} \}$$

et

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^1 f_{ij}(x)$$

nous allons écrire le programme exécutant l'algorithme suivant

\* Etape 0 : Fixer les paramètres  $\varepsilon$  et  $\eta$ .

Choisir un point de départ  $x_0$ .

Poser  $k=0$ . Aller à l'étape 1.

\* Etape 1 : Calculer  $F(x_k)$ ,  $R(x_k, \varepsilon)$ ,  $S(x_k, \varepsilon, \eta)$  et  $\psi(x_k, \varepsilon, \eta)$

Aller à l'étape 2.

\* Etape 2 : Si  $\psi(x_k, \varepsilon, \eta) = 0$ , STOP.

Si  $\psi(x_k, \varepsilon, \eta) < 0$ , il existe une direction de descente  $g_k$  définie par  $\psi(x_k, \varepsilon, \eta) = \max \{ \langle d, g_k \rangle : d \in S(x_k, \varepsilon, \eta) \}$ .

Résoudre la recherche unidimensionnelle suivante

chercher  $t_k$  tel que  $F(x_k + t_k g_k) = \min_{t \geq 0} F(x_k + t g_k)$

Poser  $x_{k+1} = x_k + t_k g_k$ . Poser  $k = k+1$ . Aller à l'étape 1.

Nous désirons appliquer cet algorithme à des problèmes de localisation c'est-à-dire des types

1. 
$$\min_{x \in \mathbb{R}^{2N}} \max_{\substack{i \in \bar{M} \\ j, k \in \bar{N}}} (w_{ji} \|x_j - a_i\|_{p_{ji}}^{p_{ji}}, v_{jk} \|x_j - x_k\|_{q_{jk}}^{q_{jk}})$$

où  $a_j, x_j$  et  $x_k \in \mathbb{R}^2$  ;  $w_{ji}$  et  $v_{jk} \in \mathbb{R}^+$  ;  $p_{ji}$  et  $q_{jk} \in [1, +\infty[$
2. 
$$\min_{x \in \mathbb{R}^{2N}} \max_{\substack{i \in \bar{M} \\ j, k \in \bar{N}}} (w_{ji} \|x_j - a_i\|_{p_{ji}}, v_{jk} \|x_j - x_k\|_{q_{jk}})$$

où  $a_j, x_j$  et  $x_k \in \mathbb{R}^2$  ;  $w_{ji}$  et  $v_{jk} \in \mathbb{R}^+$  ;  $p_{ji}$  et  $q_{jk} \in [1, +\infty[$

Des applications pratiques de ces différents problèmes ont été développées au premier chapitre. Avant de leur appliquer l'algorithme, nous allons vérifier si les hypothèses sur les fonctions sont satisfaites.

Commençons par rappeler la définition d'une norme  $l_p$  sur  $\mathbb{R}^2$  :  
 si  $y = (y_1, y_2)$  et  $p \in [1, +\infty[$

$$\|y\|_p = \left[ \sum_{i=1}^2 |y_i|^p \right]^{1/p}$$

et

$$\|y\|_p^p = \sum_{i=1}^2 |y_i|^p$$

a) Lorsque  $p_{ji}$  et  $q_{jk} > 1$ , et que nous considérons des fonctions  $f_i$  du type 1, c'est-à-dire de la forme  $w_{ji} \|x_j - a_i\|_{p_{ji}}^{p_{ji}}$  ou  $v_{jk} \|x_j - x_k\|_{q_{jk}}^{q_{jk}}$ ,

ces fonctions sont partout différentiables. Donc les seuls points de non différentiabilité qui existent résultent de la maximisation des fonctions  $f_i$ .

b) Si nous prenons à présent le second type de problème pour  $p_{ji}$  et  $q_{jk} > 1$ , le seul point de non différentiabilité d'une fonction  $\|z\|_q$  est l'origine. Donc les fonctions  $f_i = w_{ji} \|x_j - a_i\|_{p_{ji}}$  et  $f_i = v_{jk} \|x_j - x_k\|_{q_{jk}}$

admettent des points de non différentiabilité respectivement aux points

$$x_j = a_i \text{ et } x_j = x_k.$$



c) Si  $q=1$ , la norme  $\|z\|_q$  se réduit à la somme des valeurs absolues des composantes. Pour cette valeur des  $p_{ji}$  et  $q_{jk}$ , les problèmes de type 1. et 2. sont identiques. Comme au paragraphe b), la norme  $\|z\|_q$  admet un point de non différentiabilité à l'origine c'est-à-dire que les fonctions  $w_{ji} \|x_j - a_i\|_1$  et  $v_{jk} \|x_j - x_k\|_1$  sont respectivement non différentiables aux points  $x_j = a_i$  et  $x_j = x_k$ .

Puisque la norme rectangulaire contient des termes en valeur absolue, il nous faut tenir compte de points supplémentaires de non différentiabilité.

En effet,  $\|z\|_1$  est non différentiable non seulement si  $z_1 = 0$  et  $z_2 = 0$  mais également lorsque  $z_1 = 0$  et  $z_2 \neq 0$  ou lorsque  $z_1 \neq 0$  et  $z_2 = 0$ .

Donc les fonctions  $w_{ji} \|x_j - a_i\|_1$  admettent des points de non différentiabilité en  $x_{j1} = a_{i1}$  et  $x_{j2} \neq a_{i2}$  ou en  $x_{j1} \neq a_{i1}$  et  $x_{j2} = a_{i2}$ .

De même, les fonctions  $v_{jk} \|x_j - x_k\|_1$  sont non différentiables aux points  $x_{j1} = x_{k1}$  et  $x_{j2} \neq x_{k2}$  ou  $x_{j1} \neq x_{k1}$  et  $x_{j2} = x_{k2}$ .

Les différentes fonctions  $f_i$  que nous avons rencontrées en a), b) et c) sont des fonctions définies sur  $R^{2N}$  et à valeurs réelles. Puisqu'elles s'écrivent, par définition, sous forme de somme de fonctions convexes, elles sont convexes (théorème II.2). Elles sont convexes propres car à valeurs dans  $R$ . Chacune des fonctions  $f_i$  n'admet qu'un nombre fini de sous-différentiels distincts associés à ses points de non différentiabilité. Ce sont donc des fonctions convexes, propres, définies sur  $R^{2N}$  et LFS, c'est-à-dire qu'elles satisfont les hypothèses d'application de l'algorithme.

Pour différencier les cas a), b) et c), nous introduisons dans notre programme une variable entière IJKLMN.

\* Elle prend la valeur 1 lorsque nous considérons le problème

$$\min_{x \in R^{2N}} \max_{\substack{i \in \bar{M} \\ j, k \in \bar{N}}} (w_{ji} \|x_j - a_i\|_1, v_{jk} \|x_j - x_k\|_1)$$

\* La variable IJKLMN prend la valeur 2 si le problème traité est :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{2N}} \max_{\substack{i \in \bar{M} \\ j, k \in \bar{N}}} (w_{ji} \|x_j - a_i\|_{p_{ji}}, v_{jk} \|x_j - x_k\|_{q_{jk}}) \\ \text{avec } p_{ji} \text{ et } q_{jk} \in ]1, +\infty[$$

\* Cette variable a la valeur 3 lorsque nous traitons le problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{2N}} \max_{\substack{i \in \bar{M} \\ j, k \in \bar{N}}} (w_{ji} \|x_j - a_i\|_{p_{ji}}^{p_{ji}}, v_{jk} \|x_j - x_k\|_{q_{jk}}^{q_{jk}}) \\ \text{avec } p_{ji} \text{ et } q_{jk} \in ]1, +\infty[$$

Si le maximum est remplacé par la somme de ces fonctions, nous sommes en présence d'un problème de minisomme, ce qui revient à dire que  $p = 1$  dans le problème général ( p.62 ).

La variable entière ISUM permet de distinguer un problème de minimax ( ISUM = 0 ) d'un problème de minisomme ( ISUM = 1 ).

Il est également nécessaire d'introduire les variables entières N et M , N fixe le nombre de points  $x_j$  de  $\mathbb{R}^2$  à situer et M le nombre de points  $a_i$  de  $\mathbb{R}^2$  dont la position est connue.

Les points à situer sont donnés par la matrice X ; puisque chaque point  $x_j$  est élément de  $\mathbb{R}^2$  et que l'algorithme cherche la position de N points  $x_j$ , la matrice X est une matrice rectangulaire constituée de N lignes et de 2 colonnes.

Les positions des points  $a_i$  sont regroupées dans la matrice A ; c'est également une matrice rectangulaire constituée de 2 colonnes et de M lignes.

Nous introduisons encore les vecteurs W et ANORM , respectivement vecteur des poids et vecteur des normes. Ils sont tous deux de longueur  $M.N + \frac{N.(N-1)}{2}$  . Nous expliquerons, plus loin, la façon dont nous avons ordonné les composantes de ces vecteurs.

Chaque fonction  $f_i$  se voit attribuer soit un poids  $w_{ji}$ , soit un poids  $v_{jk}$ ; ces poids forment les composantes du vecteur  $W$ .

Les normes qui sont attribuées à chaque fonction  $f_i$  ne sont pas nécessairement identiques. C'est la raison pour laquelle nous utilisons le vecteur ANORM pour retenir les valeurs des  $p_{ji}$  et  $q_{jk}$ .

Quand, à l'étape 1 de l'algorithme, nous calculons  $F(x_k)$ , il faut commencer par établir les valeurs des  $f_i(x_k)$ . Nous introduisons à cet effet le vecteur  $F$  de même longueur que les vecteurs  $W$  et ANORM.

L'ordre des composantes est le même dans les trois vecteurs  $W$ , ANORM et  $F$ .

Voici la façon de les ordonner :

- \* la colonne de gauche du tableau suivant contient les fonctions  $f_i$  comme elles sont exprimées dans l'énoncé du problème dans le cas où  $IJKLMN = 3$ .
- \* Dans la colonne de droite, nous reprenons la valeur correspondante dans le programme FORTRAN, en terme des matrices et vecteurs que nous venons d'introduire.

DANS L'ENONCE	DANS LE PROGRAMME
$w_{11} \  x_1 - a_1 \ _{p_{11}}^{p_{11}}$	$F(1) = W(1) (  x(1,1) - A(1,1) ^{ANORM(1)} +  x(1,2) - A(1,2) ^{ANORM(1)} )$
$\vdots$	$\vdots$
$w_{1M} \  x_1 - a_M \ _{p_{1M}}^{p_{1M}}$	$F(M) = W(M) (  x(1,1) - A(M,1) ^{ANORM(M)} +  x(1,2) - A(M,2) ^{ANORM(M)} )$
$\vdots$	$\vdots$
$w_{21} \  x_2 - a_1 \ _{p_{21}}^{p_{21}}$	$F(M+1) = W(M+1) (  x(2,1) - A(1,1) ^{ANORM(M+1)} +  x(2,2) - A(1,2) ^{ANORM(M+1)} )$
$\vdots$	$\vdots$
$w_{NM} \  x_N - a_M \ _{p_{NM}}^{p_{NM}}$	$F(N.M) = W(N.M) (  x(N,1) - A(M,1) ^{ANORM(N.M)} +  x(N,2) - A(M,2) ^{ANORM(N.M)} )$
$\vdots$	$\vdots$
$v_{12} \  x_1 - x_2 \ _{q_{12}}^{q_{12}}$	$F(N.M+1) = W(N.M+1) (  x(1,1) - x(2,1) ^{ANORM(N.M+1)} +  x(1,2) - x(2,2) ^{ANORM(N.M+1)} )$
$\vdots$	$\vdots$
$v_{13} \  x_1 - x_3 \ _{q_{13}}^{q_{13}}$	$F(N.M+2) = W(N.M+2) (  x(1,1) - x(3,1) ^{ANORM(N.M+2)} +  x(1,2) - x(3,2) ^{ANORM(N.M+2)} )$
$\vdots$	$\vdots$
$v_{1N} \  x_1 - x_N \ _{q_{1N}}^{q_{1N}}$	$F(N.(M+1)-1) = W(N.(M+1)-1) (  x(1,1) - x(N,1) ^{ANORM(N.(M+1)-1)} +  x(1,2) - x(N,2) ^{ANORM(N.(M+1)-1)} )$
$\vdots$	$\vdots$
$v_{23} \  x_2 - x_3 \ _{q_{23}}^{q_{23}}$	$F(N.(M+1)) = W(N.(M+1)) (  x(2,1) - x(3,1) ^{ANORM(N.(M+1))} +  x(2,2) - x(3,2) ^{ANORM(N.(M+1))} )$
$\vdots$	$\vdots$
$v_{2N} \  x_2 - x_N \ _{q_{2N}}^{q_{2N}}$	$F(N.(M+2)-3) = W(N.(M+2)-3) (  x(2,1) - x(N,1) ^{ANORM(N.(M+2)-3)} +  x(2,2) - x(N,2) ^{ANORM(N.(M+2)-3)} )$
$\vdots$	$\vdots$
$v_{N-1,N} \  x_{N-1} - x_N \ _{q_{N-1,N}}^{q_{N-1,N}}$	$F(M1) = W(M1) (  x(N-1,1) - x(N,1) ^{ANORM(M1)} +  x(N-1,2) - x(N,2) ^{ANORM(M1)} )$

Tableau 1.



Dans l'étape 1, nous devons également calculer des sous-gradients de  $F$  à chaque itération. Nous les rassemblons dans la matrice  $Y$ . Chaque colonne de cette matrice est un sous-gradient et toutes les colonnes sont différentes ( Une sous-routine permet de comparer tout nouveau sous-gradient avec ceux qui existent déjà et de l'éliminer s'il fait partie de ceux-ci ). La matrice  $Y$  comprend  $K-1$  colonnes ( nombre de sous-gradients distincts ) et  $2N$  lignes ( nombre de composantes de chaque sous-gradient ).

Afin de calculer  $\psi(x_k, \varepsilon, \eta)$ , à l'étape 1 de l'algorithme, nous introduisons le vecteur  $D$ , vecteur de norme minimale de l'enveloppe convexe des colonnes de  $Y$ . Nous utilisons ensuite la même notation pour la direction de descente .

Les paramètres  $\varepsilon$  et  $\eta$  sont notés respectivement EPS et ETA. Ce sont eux qui déterminent l'élargissement par rapport au sous-différentiel classique. Ils sont initialisés au départ de chaque problème à 0.5 .

La variable entière LL détermine si les fonctions  $f_i$  sont décomposées en une somme de fonctions  $f_{ij}$  ou non.

$$LL = 1 \text{ si } f_i = f_{i1} + f_{i2} + \dots + f_{il}$$

$$LL = 2 \text{ sinon}$$

Remarquons que dans le cas où  $IJKLMN = 2$ , c'est-à-dire lorsque les fonctions  $f_i$  prennent, par exemple, la forme

$$w_{ji} \|x_j - a_i\|_{p_{ji}} = \left[ w_{ji} |x_{j1} - a_{i1}|^{p_{ji}} + |x_{j2} - a_{i2}|^{p_{ji}} \right]^{\frac{1}{p_{ji}}}$$

nous ne pouvons pas décomposer une telle fonction en somme d'autres fonctions  $f_{ij}$  LFS, plus simples.

Nous allons à présent considérer dans le détail une itération  $k$ .

\*\* La sous-routine SXEPS exécute l'étape 1 de l'algorithme.

-  $F(x_k)$ , la valeur de la fonction au point  $x_k$  est placée dans la variable AMAX.



- $R(x_k, \varepsilon)$ , l'ensemble des indices actifs est repris par le vecteur IR de longueur  $M1 = N.M + \frac{N(N-1)}{2}$ .

Les composantes de ce vecteur sont ordonnées de la même façon que celles du vecteur F ; cet arrangement est expliqué par le tableau (p. 79).

Si la fonction  $F(I) \in R(x_k, \varepsilon)$ , la  $I^e$  composante de IR vaut 1.

Si  $F(J) \notin R(x_k, \varepsilon)$ ,  $IR(J) = 0$ .

- $S(x_k, \varepsilon, \eta)$  est l'enveloppe convexe de tous les sous-gradients c'est-à-dire des K-1 colonnes de la matrice Y.

\*\* La sous-routine CORRAL [ 12 ] détermine le vecteur D de norme minimale de l'enveloppe convexe des colonnes de Y.

\*\* Il est dès lors possible de calculer  $\psi(x_k, \varepsilon, \eta)$  qui est l'opposé de la norme DN du vecteur D.

\*\* Nous nous posons la question de savoir si  $x_k$  est ou non un point stationnaire.

- Si DN est nul, puisque l'origine est un élément de  $S(x_k, \varepsilon, \eta)$ , le point  $x_k$  est un point stationnaire. Nous réduisons alors les valeurs des paramètres EPS et ETA et nous commençons l'itération suivante avec, pour point de départ, le point stationnaire  $x_k$ .
- Si DN est non nul, il existe une direction de descente donnée par  $-D/DN$  que nous notons également D.

\*\* Nous recherchons alors le scalaire ALPHA qui satisfait au problème suivant

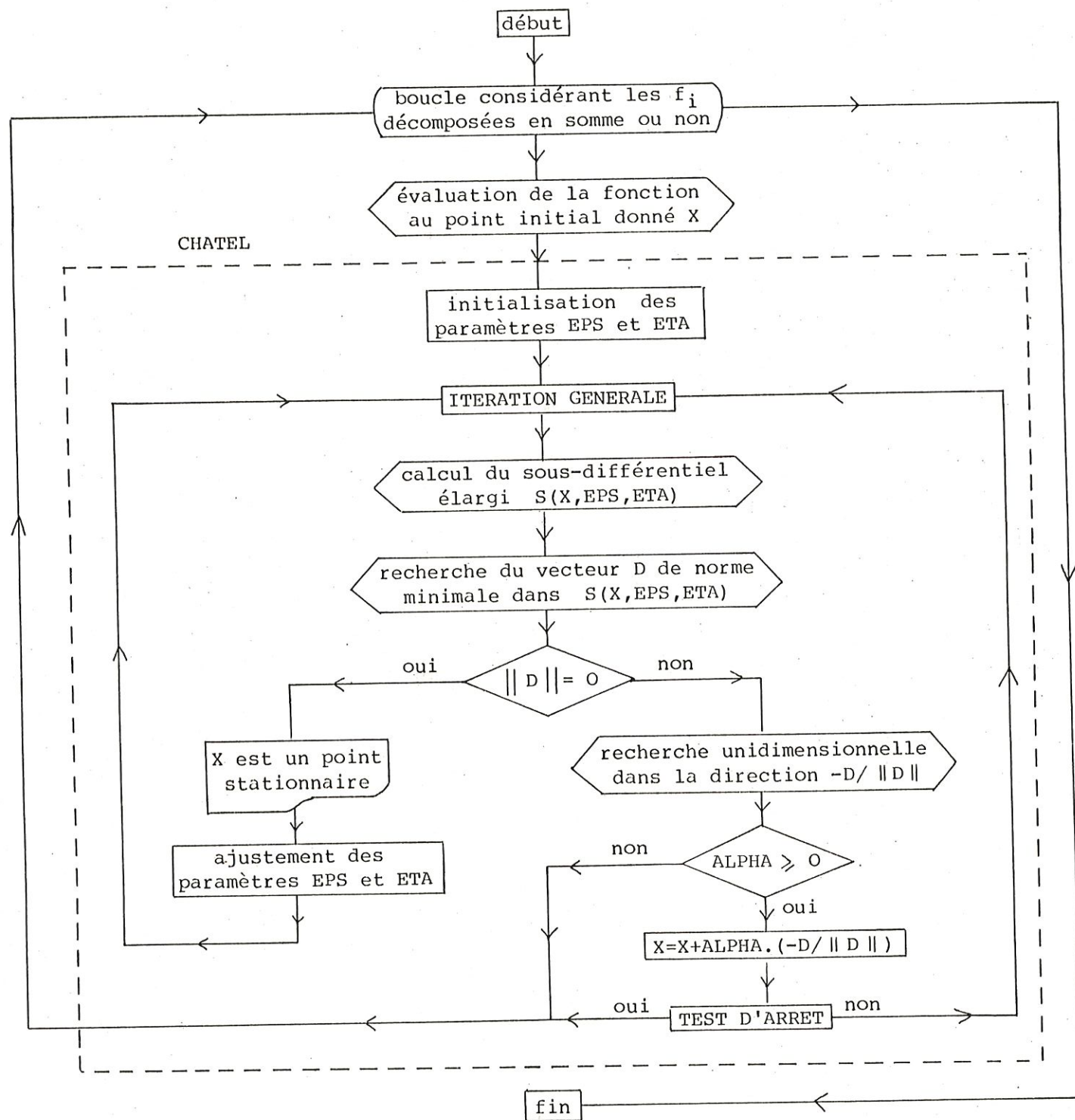
$$F(x_k + \text{ALPHA}.D) = \min_{t \geq 0} F(x_k + t.D) \text{ grâce à la sous-routine VD01AD}$$

de la librairie HARWELL.

\*\* Posant  $x_{k+1} = x_k + \text{ALPHA}.D$ , nous effectuons l'itération suivante, avec comme point de départ,  $x_{k+1}$  (EPS et ETA sont inchangés).

Voici l'organigramme du programme FORTRAN tel que nous l'avons implémenté sur ordinateur.

Nous verrons plus loin le détail des sous-routines employées dans ce programme.



Par rapport à l'algorithme de Chatelon , Hearn et Lowe, nous avons introduit deux modifications : l'ajustement des paramètres EPS et ETA et le test d'arrêt.  
Nous allons motiver ces changements.

Par le théorème de convergence démontré au chapitre précédent, nous savons que l'algorithme convergera toujours vers un point stationnaire. Deux situations peuvent se présenter :

soit l'algorithme se termine en un point stationnaire, mais à ce moment, le point ne donne qu'une approximation de la valeur minimale de la fonction ( théorème III.3 ) .

soit la suite générée par l'algorithme possède une valeur d'adhérence qui est un point stationnaire ( théorème IV.8 ) . Mais il est possible que la méthode itérative ne l'atteigne qu'après un très grand nombre d'itérations; car la seule certitude que nous possédions est l'existence de ce point stationnaire.

C'est la raison pour laquelle, lors d'applications numériques, nous ajoutons un test d'arrêt à l'algorithme. Ce test tient compte de la décroissance de la fonction objective  $F$ . Après avoir découvert une direction de descente et déterminé le nouveau point correspondant, le test permet de contrôler si la décroissance de la fonction a été significative. Si la réponse est négative, ce test est couplé avec un autre test analogue. Ce second test permet de savoir si la fonction a décru depuis la dernière valeur calculée avant le réajustement des paramètres EPS et ETA . Si ce second test n'est pas satisfait, cette décroissance non significative n'est probablement pas due aux directions de descente trouvées mais au fait que la fonction est quasi à son minimum.

D'autre part, à l'algorithme initial proposé par Chatelon , Hearn et Lowe, nous avons ajouté la procédure qui provoque un redémarrage de l'algorithme,

soit dans le cas d'un point stationnaire, puisque, à ce moment-là, la valeur de la fonction n'est qu'une approximation de la valeur minimale,

soit lors d'une décroissance de la fonction à minimiser entre deux valeurs distinctes des paramètres EPS et ETA , bien qu'entre deux itérations successives, cette décroissance n'ait plus été significative.



L'idée d'inclure cette étape supplémentaire nous fut inspirée par les faits suivants : il a été observé que la précision de l'approximation de  $F^*$ , la valeur minimale de  $F$ , est plus précise lorsque les paramètres EPS et ETA décroissent. Par conséquent, il nous a semblé approprié, pour résoudre ces problèmes de localisation, d'utiliser une valeur initiale de EPS et ETA, assez grande ( nous l'avons fixée à 0.5 ) ; la solution obtenue avec ces valeurs des paramètres sert de point de départ pour le problème où EPS et ETA ont été diminués. Le processus se poursuit par réductions successives de EPS et ETA jusqu'à atteindre une borne fixée, à moins qu'entre deux points stationnaires consécutifs, la fonction n'ait plus diminué, alors l'algorithme s'arrêtera là.

## V.2. Description détaillée du programme et de ses sous-routines

Au paragraphe précédent, nous avons décrit brièvement les sous-routines auxquelles fait appel le programme principal. Détaillons ici les sous-routines auxquelles fait appel CHATEL, sous-programme d'exécution de l'algorithme de Chatelon, Hearn et Lowe.

### V.2.1. FONCT ( X, AMAX )

Cette sous-routine calcule la valeur de la fonction à minimiser  $F$  au point  $X$  pour un problème de minimax

$$F(x) = \max \{ f_i(x) : i \in \overline{M1} \} \quad \text{avec} \quad M1 = N.M + \frac{N.(N-1)}{2}$$

\*\* Entrée :  $X$  est le point de  $R^{2N}$  où nous désirons évaluer la fonction  $F$ .

\*\* Sortie :- La valeur de la fonction  $F$  maximum des fonctions  $f_i$  au point  $X$  est mise dans la variable AMAX .

- Le vecteur  $F$  contient les valeurs de chaque fonction  $f_i$  au point  $X$  .( Pour l'ordre des composantes, se référer au tableau ( p.79 ) )

\*\* Méthode : La sous-routine est subdivisée en deux parties.



L'une calcule les fonctions  $f_i$  du type  $w_{ji} \| x_j - a_i \|_{p_{ji}}^{(p_{ji})}$

tandis que l'autre évalue les fonctions  $f_i$  de la forme

$$v_{jk} \| x_j - x_k \|_{q_{jk}}^{(q_{jk})}.$$

La variable IJKLMN permet de distinguer le problème avec ou sans l'exposant  $p_{ji}$  ou  $q_{jk}$  pour la norme.

#### V.2.2. SOMME ( X, AMAX )

---

Dans le cas d'un problème de minisomme c'est-à-dire

$$\min_{x \in R^n} F(x) \quad \text{où} \quad F(x) = \sum_{j=1}^1 f_j(x),$$

autrement dit quand  $p = 1$  dans le problème général ( p.62 ), cette sous-routine évalue la valeur de la fonction au point  $X$  de la même façon que la sous-routine FONCT. Seule la valeur AMAX devient la somme des valeurs des sous-fonctions  $f_j$  au lieu d'en être leur maximum.

#### V.2.3. RE ( AMAX, EPS )

---

Dans cette sous-routine, nous déterminons l'ensemble des indices actifs  $R(x, \varepsilon) = \{ i \in \overline{M1} : f_i(x) \geq F(x) - \varepsilon F(x) \}$

\*\* Entrée : - La variable AMAX donne la valeur de la fonction  $F$  au point  $X$ .  
 - L'ensemble des valeurs des fonctions  $f_i$  au point  $X$  est donné par le vecteur  $F$ .

Remarquons que dans l'algorithme, la fonction à minimiser est appelée  $F$  ; nous employons, quant à nous, cette notation  $F$  pour désigner le vecteur des  $f_i$ , dans le programme FORTRAN.

- Le paramètre EPS détermine la proximité des fonctions  $f_i$  par rapport à la fonction maximale  $F$ .

\*\* Sortie : L'ensemble des indices actifs est déterminé à l'aide d'un vecteur booléen IR. Il comprend autant de composantes que le vecteur  $F$  des valeurs des sous-fonctions  $f_i$ .

- \*\* Méthode :  $IR(I) = 1$  si l'indice est actif c'est-à-dire si  $f_i(x) \geq F(x) - \epsilon F(x)$  .  
 Dans le cas contraire,  $IR(I) = 0$  .  
 Il suffit donc de contrôler la  $I^e$  composante de  $IR$  lorsque nous voulons savoir si la fonction  $f_i$  correspondante est à considérer ou non.

#### V.2.4. COMP

---

Cette sous-routine traite le tableau  $Y$  des sous-gradients dont l'enveloppe convexe déterminera  $S(x, \epsilon, \eta)$  . Elle compare chaque nouveau sous-gradient avec ceux qui existent déjà pour ne garder que les éléments distincts.

- \*\* Entrée : La matrice  $Y$  est constituée des sous-gradients disposés en colonnes. Sa dimension est donc de  $K$  colonnes où  $K$  est le nombre de sous-gradients déjà calculés, et de  $2N$  lignes ( où  $N$  est le nombre de points  $x_i$  à situer ) c'est-à-dire des  $2N$  composantes de chaque sous-gradient.
- \*\* Sortie :  $K$  est le numéro de la colonne dans laquelle devra se placer le prochain sous-gradient qui sera déterminé.
- \*\* Méthode : A l'entrée,  $K$  désigne le nombre de sous-gradients dont nous disposons déjà. La sous-routine compare le dernier élément obtenu, situé dans la  $K^e$  colonne avec chaque sous-gradient précédent.  
 S'il est distinct, à la sortie  $K = K + 1$  .  
 Sinon, ce sera dans la colonne  $K$  que devra se placer le nouveau sous-gradient.

#### V.2.5. GRAD ( X, K2, K4 )

---

Cette sous-routine calcule le gradient d'une fonction  $f_i$  au point  $X$  . Les variables  $K2$  et  $K4$  caractérisent le type de fonctions  $f_i$  traitées.

si  $f_i = w_{ji} \left\| x_j - a_i \right\|_{p_{ji}}^{(p_{ji})}$  alors nous posons  $K4 = 0$  et  $K2 = j$

si  $f_i = v_{jk} \left\| x_j - x_k \right\|_{q_{jk}}^{(q_{jk})}$  alors nous posons  $K4 = k$  et  $K2 = j$

Cette sous-routine est subdivisée en deux parties, l'une traite le cas où

$K4 = 0$  c'est-à-dire le cas où  $f_i = w_{ji} \left\| x_j - a_i \right\|_{p_{ji}}^{(p_{ji})}$

tandis que la seconde partie traite le cas des fonctions  $f_i = v_{jk} \left\| x_j - x_k \right\|_{q_{jk}}^{(q_{jk})}$ .

#### V.2.6. SSGRAD ( X,JD,K2,K4 )

---

Dans ce sous-programme, nous calculons les sous-gradients d'une fonction  $f_i$  en un point  $X$  de non différentiabilité.

Les sous-gradients sont obtenus en prenant les normales aux plans tangents déterminés par les courbes de niveau de la fonction  $f_i$  au voisinage d'un point de non différentiabilité.

Les variables  $K2$  et  $K4$  permettent de repérer les points de non différentiabilité, en caractérisant, comme dans la sous-routine GRAD, le type de fonctions  $f_i$  dont nous calculons les sous-gradients.

La variable entière  $JD$  indique le genre de non différentiabilité de la fonction  $f_i$ , déterminée par  $K2$  et  $K4$ , au point  $X$ .

\*  $JD = 1$  si, pour  $f_i$  de la forme  $w_{ji} \left\| x_j - a_i \right\|_{p_{ji}}^{(p_{ji})}$ , la fonction  $f_i$  est

non différentiable uniquement en  $x_{j1} = a_{i1}$

ou pour  $f_i$  de la forme  $v_{jk} \left\| x_j - x_k \right\|_{q_{jk}}^{(q_{jk})}$ , la fonction  $f_i$  est

non différentiable uniquement en  $x_{j1} = x_{k1}$

\*  $JD = 2$  si, pour  $f_i$  de la forme  $w_{ji} \left\| x_j - a_i \right\|_{p_{ji}}^{(p_{ji})}$ , la fonction  $f_i$  est

non différentiable uniquement en  $x_{j2} = a_{i2}$

ou pour  $f_i$  de la forme  $v_{jk} \|x_j - x_k\|_{q_{jk}}^{(q_{jk})}$ , la fonction  $f_i$  est

non différentiable uniquement en  $x_{j2} = x_{k2}$

\* JD = 3 si, pour  $f_i$  de la forme  $w_{ji} \|x_j - a_i\|_{p_{ji}}^{(p_{ji})}$ , la fonction  $f_i$  est

non différentiable en  $(x_{j1}, x_{j2}) = (a_{i1}, a_{i2})$

ou pour  $f_i$  de la forme  $v_{jk} \|x_j - x_k\|_{q_{jk}}^{(q_{jk})}$ , la fonction  $f_i$  est

non différentiable au point  $(x_{j1}, x_{j2}) = (x_{k1}, x_{k2})$

#### V.2.7. SXEPS ( X, EPS, ETA, LL )

---

Cette sous-routine calcule le sous-différentiel élargi au point  $X$ , qui sera constitué par l'enveloppe convexe des sous-gradients, c'est-à-dire des colonnes de  $Y$ .

$S(x, \varepsilon, \eta)$  tient compte des fonctions  $f_i$  proches à  $\varepsilon$  près de la fonction maximale  $F(x)$  et des points de non différentiabilité de ces fonctions  $f_i$  dans un voisinage de rayon  $\eta$  autour du point  $x$ .

Rappelons que  $S(x, \varepsilon, \eta) = \text{Co} ( \cup \{ S_i(x, \eta) : i \in R(x, \varepsilon) \} )$

où  $R(x, \varepsilon) = \{ i \in \overline{M1} : f_i(x) \geq F(x) - \varepsilon F(x) \}$

$$S_i(x, \eta) = \sum_{j=1}^1 \partial f_{ij}(G_{ij}(x, \eta))$$

sachant que  $f_i(x) = \sum_{j=1}^1 f_{ij}(x)$

$$G_{ij}(x, \eta) = \{ x \} \cup \{ y \in B(x, \eta) \text{ et } f_{ij} \text{ non différentiable en } y \}$$

où  $B(x, \eta)$  désigne la boule euclidienne centrée en  $x$  et de rayon  $\eta$ .

\*\* Méthode : Après avoir calculé  $F(x)$  et  $R(x, \varepsilon)$ , la sous-routine se subdivise en deux parties suivant la forme de la fonction  $f_i$

à traiter:  $w_{ji} \|x_j - a_i\|_{p_{ji}}^{(p_{ji})}$  ou  $v_{jk} \|x_j - x_k\|_{q_{jk}}^{(q_{jk})}$



Les opérations effectuées dans chacune des deux parties sont similaires : lorsque la fonction  $f_i$  a un indice actif c'est-à-dire  $IR(I) = 1$ , nous testons la variable IJKLMN et un branchement se fait suivant sa valeur.

a) Problème en norme 1.

Après avoir mis en évidence si la fonction  $f_i$  est différentiable ou non en  $x$  et calculé la valeur de la variable JD, les sous-routines GRAD et SSGRAD permettent de calculer le sous-différentiel  $\partial f_i(x)$ .

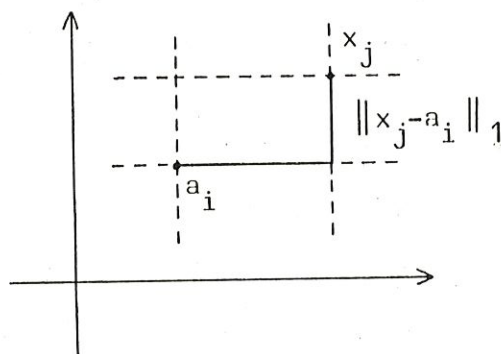
Nous recherchons ensuite les points de non différentiabilité des fonctions  $f_i$  dans un voisinage  $\eta$  autour de  $x$  et nous calculons, par l'intermédiaire de la sous-routine SSGRAD, les sous-gradients correspondants. Cette recherche tient compte de la forme particulière de la fonction  $f_i$ . Il suffit en effet d'examiner chacune des directions des coordonnées sur une largeur  $\eta$  de part et d'autre du point  $x$ .

Explicitons ce raisonnement à l'aide des schémas suivants :

nous étudions le cas de  $f_i = w_{ji} \|x_j - a_i\|_1$  où  $w_{ji} = 1$ . afin de simplifier la représentation.

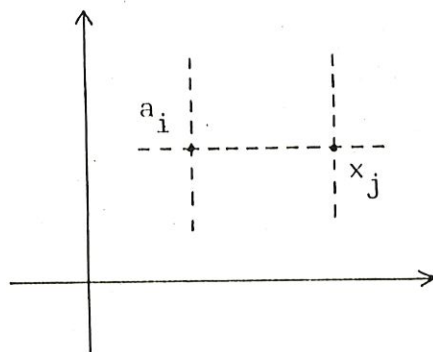
\* Examinons tout d'abord la situation pour le point  $x$ .

fig. 24



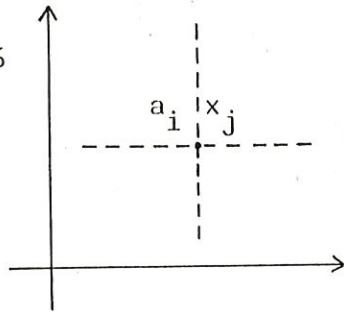
le point  $x_j$  n'est pas un point de non différentiabilité  
donc  $JD = 0$ .

fig. 25



le point  $x_j$  est un point de non différentiabilité de la fonction  $f_i$ , en sa seconde composante d'où  $JD = 2$

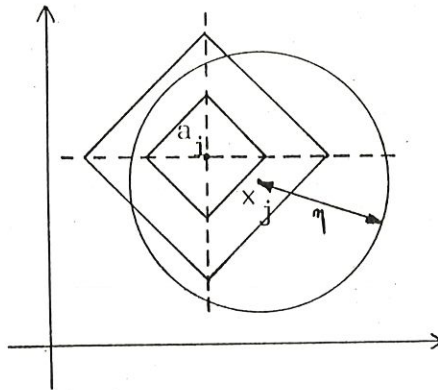
fig. 26



le point  $x_j$  est un point de non différentiabilité pour la fonction  $f_i$ , en ses deux composantes donc  $JD = 3$ .

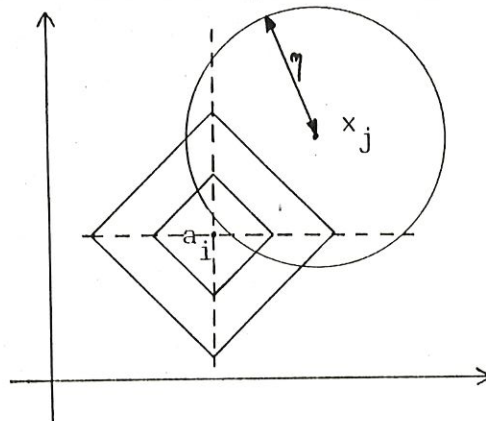
\* Examinons à présent la situation au voisinage du point  $x$ .

fig. 27



le voisinage du point  $x_j$  contient le point  $a_i$  de non différentiabilité pour  $f_i$ , en ses deux composantes donc  $JD = 3$ .

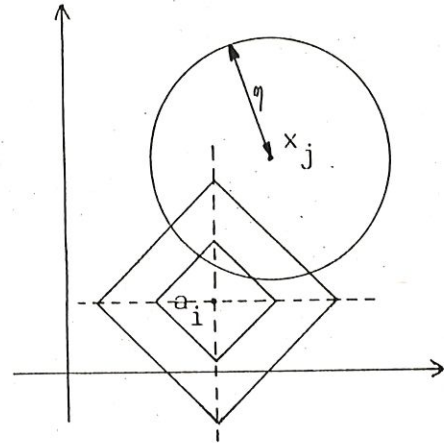
fig. 28



si nous procédons comme pour les situations précédentes, nous obtenons, à la figure 28,  $JD = 3$ . En effet, il existe des points dans le voisinage de  $x_j$  de rayon  $\eta$  qui sont des points de non différentiabilité de  $f_i$  en leur première composante et d'autres en leur seconde composante. Cependant, le point  $a_i$  n'appartient pas au voisinage de  $x_j$  car  $d(x_j, a_i) > \eta$ . Dès lors, il faudra considérer que dans le voisinage de  $x_j$ , il y a des points de non différentiabilité de la fonction  $f_i$  en la première composante ( donc  $JD = 1$  ) et d'autres en la seconde composante ( donc  $JD = 2$  ). Mais nous ne pouvons jamais avoir  $JD = 3$  dans ce cas.

fig. 29

le voisinage de  $x_j$  de rayon  $\eta$  contient des points de non différentiabilité de la fonction  $f_i$ , en leur première composante donc JD = 1



Grâce au caractère LFS des fonctions considérées et à leur forme particulière, les sous-gradients ne doivent être calculés qu'en un point pour chaque genre de non différentiabilité puisque le sous-différentiel est identique pour tous les points de non différentiabilité situés sur le même demi-axe d'origine  $a_i$ . C'est pourquoi ces fonctions n'admettent qu'un nombre fini d'ensembles distincts de sous-gradients c'est-à-dire qu'elles sont LFS.

Voici l'interprétation géométrique de la recherche des sous-gradients.

Une fonction  $f_i = w_{ji} \|x_j - a_i\|_1$  se représente dans le plan  $R^2$  par ses courbes de niveau, des carrés centrés en  $a_i$ .

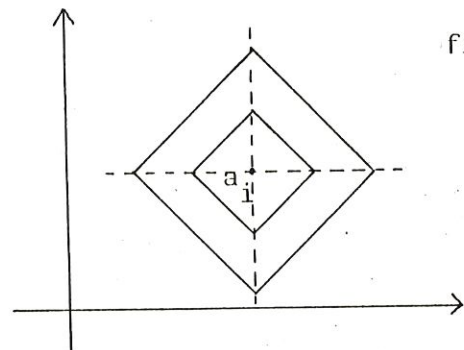


fig. 30

Si nous regardons ce schéma en ajoutant une troisième dimension, c'est une pyramide sur sa pointe  $a_i$ . Les points de non différentiabilité arêtes de la pyramide. En ces points, les sous-gradients sont les normales aux plans tangents à la surface de  $f_i$  dans le voisinage du point de non différentiabilité. C'est ainsi qu'au point de non différentiabilité de  $f_i$  en ses deux composantes, au point  $a_i$ , il existe quatre plans tangents (les quatre faces de la pyramide) qui se coupent.

Aussi une étude de sous-gradients en ce point implique le calcul des normales aux quatre plans tangents, qui sont les gradients en un point voisin de  $a_i$  pris dans chaque face de la pyramide.

Si nous considérons un point de non différentiabilité de la fonction  $f_i$  en une seule de ses composantes, c'est un point qui n'appartient qu'à une seule arête de la pyramide. C'est la rencontre de deux faces de la pyramide qui délimitent deux régions dans lesquelles les gradients auront des directions distinctes. L'ensemble des sous-gradients sera donc formé de deux gradients : les normales à chacun des deux plans tangents à la fonction, pour des points situés dans chacune des régions.

b) Problème en norme  $q > 1$ .

Nous procédons de la même façon en sachant que le seul point de non différentiabilité de  $\|x\|_q$  est l'origine. Donc seul  $JD = 3$  indique que la fonction est non différentiable au point considéré.

c) Problème en norme  $q$  exposant  $q$ ,  $q > 1$

La norme élevée à la puissance  $q$  est partout différentiable lorsque  $q > 1$ . Nous appelons donc uniquement GRAD au point considéré. Dans ce cas, il est inutile de considérer le voisinage du point  $x$  pour y rechercher d'éventuels points de non différentiabilité.

Nous utilisons également les variables entières  $I$ ,  $LI$  et  $LIJ$  dans les sous-routines SXEPS et GRAD.

\* La variable  $I$  caractérise le point  $a_i$  dans la fonction  $f_i = w_{ji} \|x_j - a_i\|_{p_{ji}}^{(p_{ji})}$  c'est-à-dire quand  $K4 = 0$ .

Donc si  $f_i = w_{ks} \|x_k - a_s\|_{p_{ks}}^{(p_{ks})}$ , cette fonction est entièrement définie par  $I = s$ ,  $K4 = 0$ ,  $K2 = k$ .

\* Etudions à présent le rôle de  $LIJ$ .

Nous avons introduit précédemment la variable  $LI$  qui indique si la fonction  $f_i$  est décomposée en une somme de fonctions  $f_{ij}$ .



Nous avons posé  $LL = 1$  si  $f_i$  est décomposée en une somme de fonctions  $f_{ij}$   
 $LL = 2$  si  $f_i$  n'est pas décomposée en une somme de  
fonctions  $f_{ij}$ .

Chaque fonction  $f_i = \sum_{j=1}^1 f_{ij}$  est soit de la forme  $w_{ji} \parallel x_j^{-a_i} \parallel_{p_{ji}}^{(p_{ji})}$   
soit de la forme  $v_{jk} \parallel x_j^{-x_k} \parallel_{q_{jk}}^{(q_{jk})}$

Donc dans le cas où le problème est posé en norme  $q = 1$  ou en norme  $q$  élevée

à la puissance  $q$ , nous pouvons écrire soit  $f_i = w_{ji} \left( \sum_{s=1}^2 |x_{js}^{-a_{is}}|^{p_{ji}} \right)$

soit  $f_i = v_{jk} \left( \sum_{s=1}^2 |x_{js}^{-x_{ks}}|^{q_{jk}} \right)$ .

Par conséquent, la décomposition en somme de fonctions LFS  $f_{is}$  comporte

soit les fonctions  $w_{ji} |x_{js}^{-a_{is}}|^{p_{ji}}$  pour  $s=1$  et  $s=2$ ,

soit les fonctions  $v_{jk} |x_{js}^{-x_{ks}}|^{q_{jk}}$  pour  $s=1$  et  $s=2$ .

La variable LIJ permet de traiter le problème aussi bien avec  $f_i$  non décomposée, qu'avec  $f_i$  décomposée en la somme de deux fonctions  $f_{ij}$  LFS, par l'intermédiaire d'une boucle en LIJ variant de LL à 2.

- si  $f_i = f_{i1} + f_{i2}$ , alors  $LL=1$ ; donc pour  $LIJ=1$ , nous étudions  $f_{i1}$  et lorsque LIJ prend la valeur 2, nous étudions  $f_{i2}$ . En outre nous savons que la somme des sous-gradients correspondants à  $\partial f_{i1}$  et de ceux de  $\partial f_{i2}$  donnera  $S_i(x, \eta)$  puisque

$$S_i(x, \eta) = \sum_{j=1}^2 \partial f_{ij}(G_{ij}(x, \eta))$$

- si  $f_i$  n'est pas décomposée en une somme de fonctions  $f_{ij}$  LFS, LL vaut 2 et la boucle en LIJ ne sera effectuée qu'une seule fois pour  $LIJ=2$ .

\* C'est grâce à la variable entière LI qu'à ce moment nous considérerons bien  $f_i$  toute entière et non  $f_{i2}$  comme dans la situation précédente. En effet, chaque boucle étudiant la différentiabilité des fonctions varie de LI à LIJ. Et ce n'est qu'après un passage dans la boucle en LIJ que l'indice LI est incrémenté d'une unité.

Ainsi si la boucle en LIJ ne s'effectue qu'une seule fois, cela signifie que  $LL=2$  c'est-à-dire que  $f_i$  n'est pas décomposée en une somme de fonctions  $f_{ij}$  et d'autre part, LI gardera toujours sa valeur initiale ( égale à 1 ) . Par conséquent, la recherche du genre de non différentiabilité éventuelle se fera d'un indice  $LI=1$  à  $LIJ=2$  c'est-à-dire pour la fonction non décomposée.

Par contre, si  $f_i$  est décomposée en une somme de deux fonctions  $f_{ij}$ ,  $LL=1$ . Donc nous effectuerons d'abord la boucle en LIJ pour  $LIJ=1$  et  $LI=1$  c'est-à-dire que nous étudierons les points de non différentiabilité éventuels de la fonction  $f_{i1}$ . Ensuite la boucle en LIJ est effectuée pour  $LIJ=2$  et  $LI=LI+1=2$ , donc seuls les points de non différentiabilité éventuels de la fonction  $f_{i2}$  sont étudiés.

L'organigramme de cette sous-routine SXEPS figure p.97-98

A la sortie du sous-programme SXEPS, nous sommes en possession de tous les sous-gradients distincts dont l'enveloppe convexe donnera le sous-différentiel élargi  $S(x, \varepsilon, \eta)$ .

#### V.2.8. CORRAL

---

Cette sous-routine est l'implémentation par Lemaréchal de la méthode de Wolfe [14].

Cette sous-routine nous a été fournie par le département de mathématique.

Elle résoud le problème quadratique

$$\min_d \|d\|^2$$

$$\text{avec } d = \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i$$

$$g_i \in S = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}, \quad k \text{ est fini}$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_i \geq 0$$

Elle recherche le vecteur  $d$  de norme minimale dans l'enveloppe convexe des  $k$  vecteurs  $g_i$ . Elle nous permettra de calculer la valeur de la fonction auxiliaire  $\psi(x, \epsilon, \eta)$  et d'étudier la stationnarité du point  $x$  de l'itération en cours.

#### V.2.9. VDO1AD (extraite de la librairie Harwell)

---

C'est une sous-routine propre à la recherche unidimensionnelle et qui s'applique particulièrement bien à des fonctions non partout différentiables car elle ne fait pas intervenir de dérivées de la fonction. Cette sous-routine s'inspire de la méthode d'interpolation quadratique de Powell.

Puisque c'est une méthode itérative, nous fournissons au départ une valeur initiale du paramètre unidimensionnel recherché ( nous avons toujours pris comme valeur initiale  $\text{ALPHA}=0$  ). La sous-routine, pour évaluer la valeur de la fonction en de nouveaux points, redonne le contrôle au programme d'appel. Rappelons brièvement la méthode de Powell.

Le point minimum est trouvé à l'aide d'une fonction quadratique construite à partir de trois estimations consécutives données par des valeurs arbitraires du paramètre unidimensionnel de sorte que la fonction quadratique y coïncide avec la fonction à minimiser. Par minimisations successives de la fonction quadratique, il y a ajustement du paramètre unidimensionnel. Les itérations se poursuivent jusqu'à atteindre la précision désirée.

#### V.2.10. CHATEL ( X,LL,AMAX )

---

Cette sous-routine applique l'algorithme de J. Chatelon ,  
D.W. Hearn et T.J. Lowe .

\*\* Entrée : Le point  $X$  est le point de départ de l'algorithme.

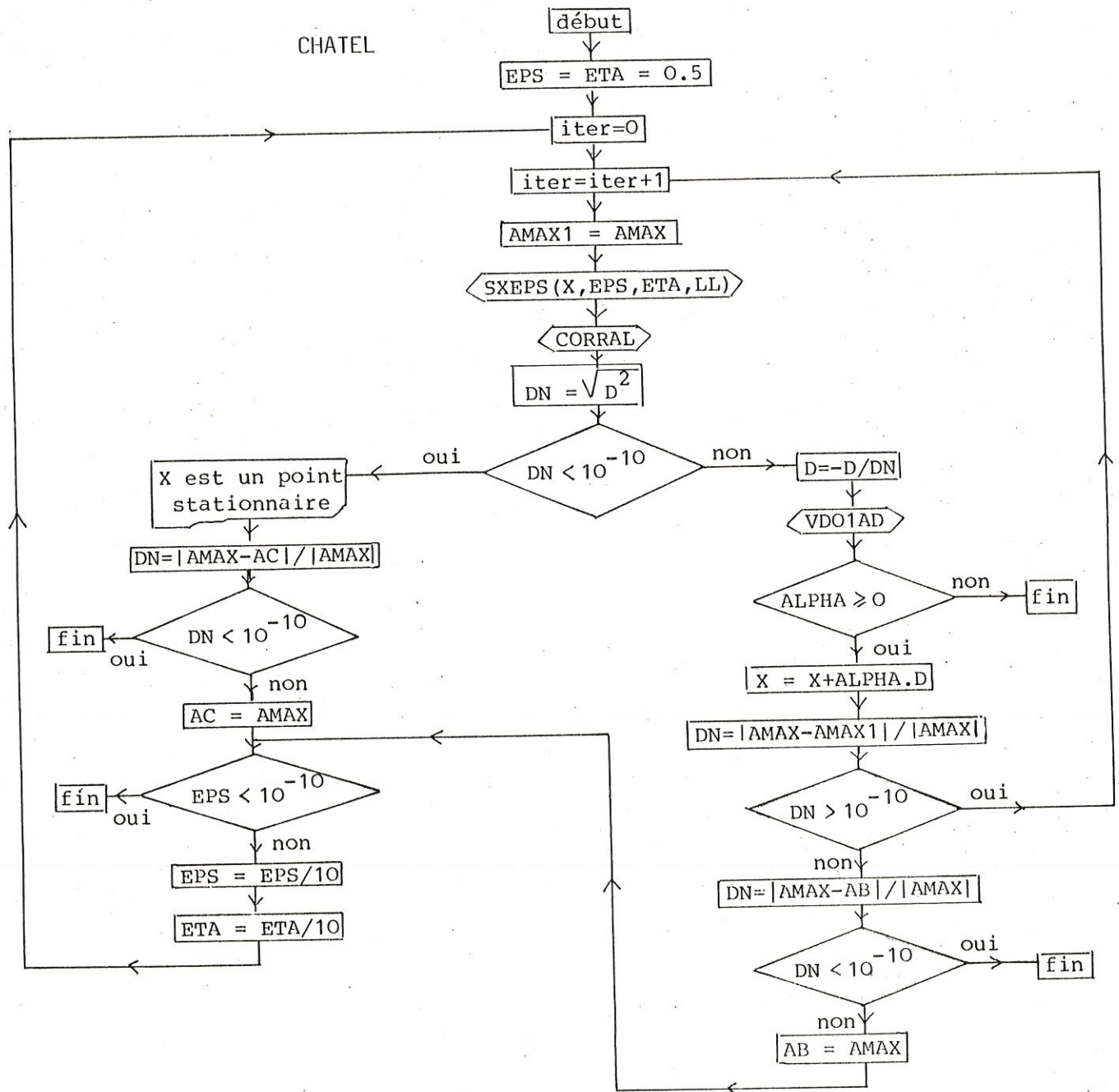
La valeur de la fonction en ce point initial est donnée par  $\text{AMAX}$ .

La variable  $\text{LL}$  indique la façon dont sont décomposées les sous-fonctions  $f_i$ .



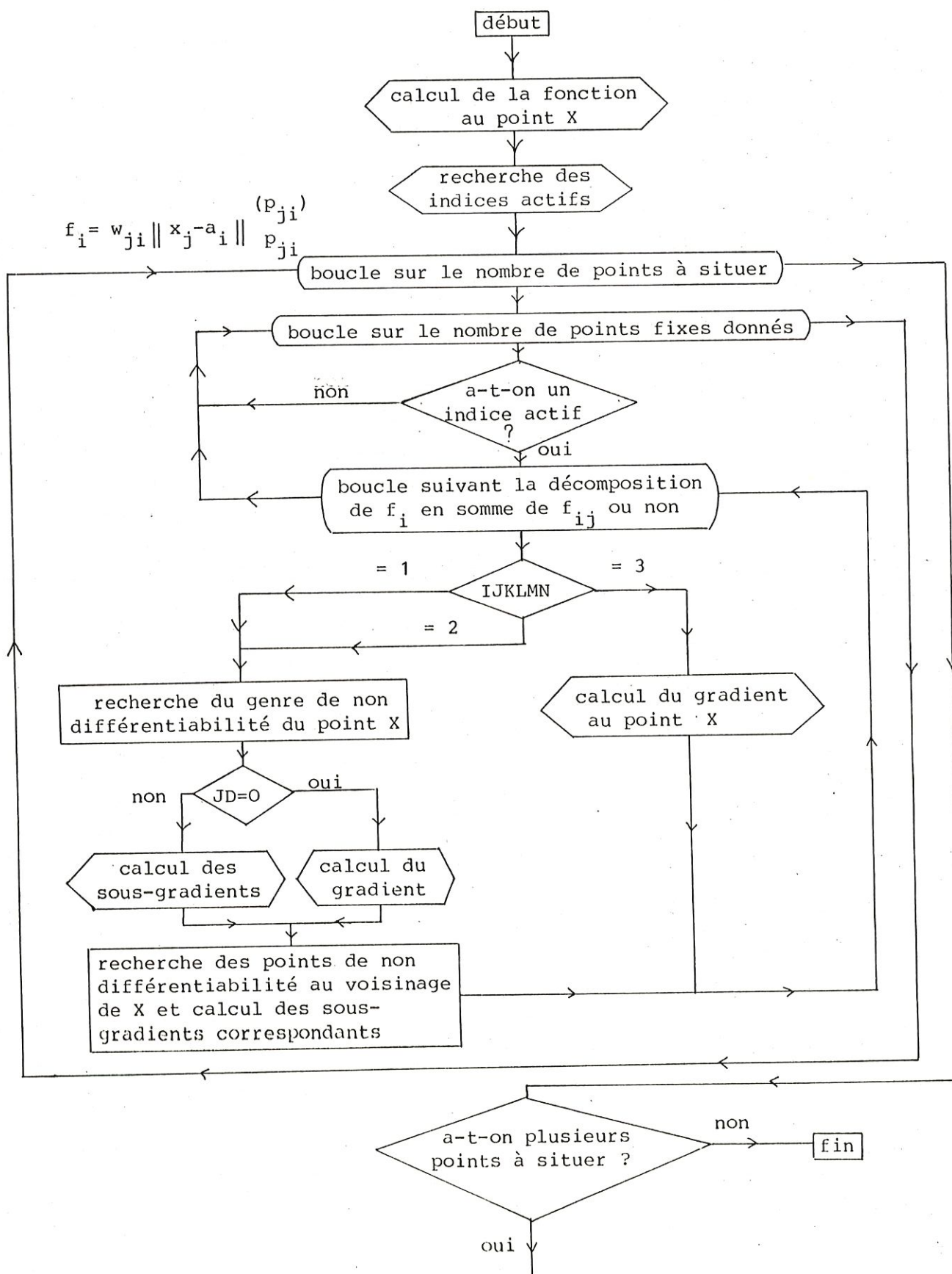
\*\* .Sortie : Le point X est, à la sortie, le point quasi-minimum ou stationnaire pour la fonction F tandis que la valeur de la fonction objective en ce point est alors donnée par AMAX.

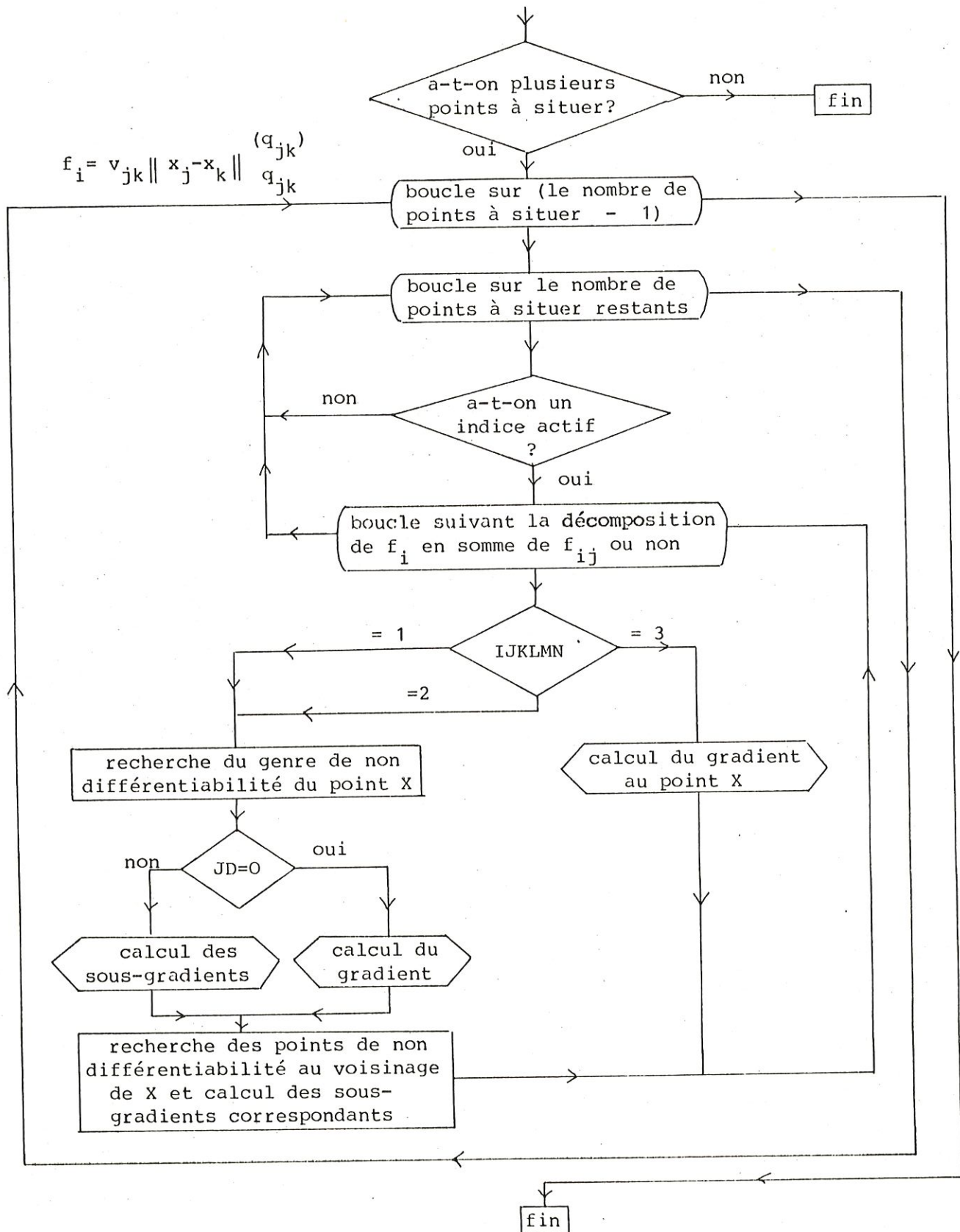
Avant le texte FORTRAN détaillé de notre programme, reprenons l'organigramme de la sous-routine principale, d'exécution proprement dite de l'algorithme de Chatelon, Hearn et Lowe, où nous employons les notations introduites dans ce chapitre.





## Organigramme de la sous-routine SXEPS





### V.3 Texte FORTRAN du programme exécutant l'algorithme.

```

1      PROGRAM DEMOD2
2 C
3 C
4 C
5 C      PROGRAMME PRINCIPAL D'EXECUTION DE L'ALGORITHME DE SOUS
6 C      GRADIENTS DE J. CHATELON - P. HEARN - T. J. LOWE POUR DES PROBLEMES
7 C      DE MINIMAX
8 C      IL RECHERCHE LE MINIMUM D'UNE FONCTION DANS LE PLAN REEL
9 C      MIN(MAX(F(I), I=1,2,...,P)) OU F(I)=SOMME(F(I,J), J=1,2,...,L)
10 C
11 C      F(I)=LE POIDS W(I) QUE MULTIPLIE LA NORME ANORM(I)
12 C      DE (X(K)-A(J))
13 C      OU F(I)=LE POIDS W(I) QUE MULTIPLIE LA NORME ANORM(I)
14 C      DE (X(K)-X(J))
15 C
16 C      LISTE DES DONNES :
17 C      -----
18 C
19 C      ISUM = 0 POUR UN PROBLEME DE MINIMAX
20 C      1 POUR UN PROBLEME DE MINISUM (C-A-D QUAND P = 1)
21 C      IJKLMN = 1 SI LA NORME ANORM(I) = 1.
22 C      2 SI ON CONSIDERE LA NORME AU SENS HABITUEL
23 C      3 SI LA NORME ANORM(I) EST ELEVEE A LA PUISSANCE
24 C      N      : NOMBRE DE POINTS A SITUER
25 C      M      : NOMBRE DE POINTS FIXES
26 C      A      : MATRICE DES POINTS FIXES
27 C      W      : VECTEUR DES POIDS DE DIMENSION M1
28 C      LES N*M PREMIERS TERMES SONT LES POIDS DES SOUS
29 C      FONCTIONS CORRESPONDANT A (X(K)-A(J)) OU J VARIE
30 C      DE 1 A M POUR CHAQUE K FIXE
31 C      LES N*(N-1)/2 TERMES SUIVANTS SONT LES POIDS DES
32 C      SOUS-FONCTIONS CORRESPONDANT A (X(K)-X(J)) OU J
33 C      VARIE DE K+1 A N POUR CHAQUE K FIXE
34 C      ANORM : VECTEUR DES NORMES ASSOCIEES AUX SOUS-FONCTIONS,
35 C      DE DIMENSION M1, CONSTRUIT DE LA MEME FACON QUE W
36 C      X      : MATRICE DES POINTS INITIAUX A SITUER
37 C
38 C
39 C
40      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
41      COMMON N,M,A(150,10),W(150),ANORM(150)
42      COMMON /DIM/ M1
43      COMMON /SE/ IJKLMN
44      DIMENSION X(150,10)
45      PRINT 6999
46 9999 IJK=IJK+1
47 C
48 C      LECTURE DES DONNEES
49 C
50      READ 8001,ISUM

```

```

51      READ 8001,IJKLMN
52      PRINT 3888
53      PRINT 7000,IJK
54      READ 8001,N
55      PRINT 9001,N
56      READ 8001,M
57      PRINT 9002,M
58      M1=N*M+N*(N-1)/2
59      PRINT 9005
60      DO 1 I=1,M
61      READ 8002,(A(I,J),J=1,2)
62      1 PRINT 9006,(A(I,J),J=1,2)
63      READ 8000,(ANORM(I),I=1,M1)
64      PRINT 9000,(ANORM(I),I=1,M1)
65      READ 8002,(W(I),I=1,M1)
66      PRINT 9025,(W(I),I=1,M1)
67 C
68 C      PROBLEME RESOLU POUR LA DECOMPOSITION DES SOUS-FONCTIONS F(I) EN
69 C      LA SOMME DE 1 ET 2 FONCTIONS F(I,J)
70 C
71      DO 100 L=1,2
72      IF (IJKLMN.EQ.2.AND.L.EQ.2) GOTO 100
73      PRINT 8888
74      PRINT 9007,L
75      LL=1
76      IF (L.EQ.1) LL=2
77      PRINT 9008
78      DO 3 I=1,N
79      READ 8002,(X(I,J),J=1,2)
80      3 PRINT 9006,(X(I,J),J=1,2)
81      IF (ISUM.EQ.0) GOTO 14
82      CALL SOMME(X,AMAX)
83      GOTO 15
84      14 CALL FONCT(X,AMAX)
85      15 PRINT 9010,AMAX
86 C
87 C      APPEL DE L'ALGORITHME
88 C
89      CALL CHATEL(X,LL,ISUM,AMAX)
90      PRINT 9022,AMAX
91      PRINT 9023
92      DO 10 I=1,N
93      10 PRINT 9006,(X(I,J),J=1,2)
94      100 CONTINUE
95      IF (IJK.LT.3) GOTO 9999
96      STOP
97      8000 FORMAT(8F10.8)
98      8001 FORMAT(I3)
99      8002 FORMAT(8F10.5)
100     8888 FORMAT(1H1)

```



```

101 9000 FORMAT(///1X,'VECTEUR DES NORMES',/,100(//1X,13F10.5))
102 9001 FORMAT(//1X,'NOMBRE DE POINTS A SITUER :',I3)
103 9002 FORMAT(//1X,'NOMBRE DE POINTS DONNES :',I3)
104 9005 FORMAT(///1X,'MATRICE DES POINTS DONNES')
105 9006 FORMAT(/1X,10F13.8)
106 9007 FORMAT(/1X,' ** PROBLEME RESOLU AVEC',I3,' FONCTIONS F(I,J) ** ',/
107      C/1X,4X,40('*'))
108 9008 FORMAT(//1X,'MATRICE DES POINTS INITIAUX ')
109 9010 FORMAT(//1X,'VALEUR DE LA FONCTION AU POINT INITIAL :',F16.8)
110 9022 FORMAT(//1X,' VALEUR MINIMALE OPTIMALE DE LA FONCTION ',F20.10)
111 9023 FORMAT(//1X,'POINT MINIMUM OPTIMAL')
112 9025 FORMAT(///1X,'VECTEUR DES POIDS',/,100(//1X,13F10.5))
113 6999 FORMAT(1H1,//////////,81('*'),2(/1X,'*',78X,'*'),/1X,'*',5X,' RE
114      CSOLUTION DE PROBLEMES MINIMAX PAR UN ALGORITHME DE SOUS-GRADIENTS
115      C',4X,'*',/1X,'*',10X,' DE J.CHATELON-D.HEARN-T.J.LOWE ',36X,'*',2
116      C(/1X,'*',78X,'*'),/1X,80('*'))
117 7000 FORMAT(//1X,30('*'),/1X,'*',28X,'*',/1X,'*',5X,'PROBLEME NUMERO',I
118      C3,5X,'*',/1X,'*',28X,'*',/1X,30('*'))
119      END

```

```

1      SUBROUTINE CHATEL(X,LL,ISUM,AMAX)
2      C
3      C
4      C
5      C      CHATEL APPLIQUE L'ALGORITHME DE J.CHATELON, D.HEARN ET T.LOWE
6      C      A LA FONCTION MAX(F(I),I=1,2,...,P)
7      C      OU F(I)=SOMME(F(I,J),J=1,2,...,L)
8      C
9      C      F(I)=LE POIDS W(I) QUE MULTIPLIE LA NORME ANORM(I)
10     C      DE (X(K)-A(J))
11     C      OU F(I)=LE POIDS W(I) QUE MULTIPLIE LA NORME ANORM(I)
12     C      DE (X(K)-X(J))
13     C
14     C      LISTE DES ARGUMENTS :
15     C      -----
16     C
17     C      LL = 1 SI F(I) EST DECOMPOSEE EN SOMME DE 2 FONCTIONS F(I,J)
18     C      = 2 SI F(I) N'EST PAS DECOMPOSEE EN UNE SOMME
19     C      DE FONCTIONS F(I,J)
20     C      ISUM = 0 POUR UN PROBLEME DE MINIMAX
21     C      1 POUR UN PROBLEME DE MINISUM (C-A-D QUAND P = 1 )
22     C      AMAX EST LA VALEUR DE LA FONCTION AU POINT X
23     C
24     C
25     C
26     C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
27     C      COMMON N,M,A(150,10),W(150),ANORM(150)
28     C      COMMON /GEN/ Y(10,150),K,NN
29     C      DIMENSION X(150,10),XK(150,10)
30     C      DIMENSION P(1920),D(48),AL(40),JC(40)
31     C      LOGICAL TEST
32     C      LOGICAL TESTE
33     C      LOGICAL TEPS
34     C
35     C      INITIALISATION DES PARAMETRES
36     C
37     C      MAXF=50
38     C      ABSACC=1.0-9
39     C      RELACC=1.0-9
40     C      XSTEP=1.00
41     C      NN=2*N
42     C      AB=0.00
43     C      AC=0.00
44     C      EPS=0.5
45     C      ETA=0.5
46     C      TEPS=.FALSE.
47     C      1111 ITER=0
48     C      PRINT 9013,EPS
49     C      PRINT 9004,ETA
50     C

```

```

51 C      DEBUT DE L'ITERATION ITER
52 C
53 1000 ITER=ITER+1
54      PRINT 9018,ITER
55      AMAX1=AMAX
56      CALL SXEPS(X,EPS,ETA,LL,ISUM)
57      PRINT 9011
58      K1=K-1
59      DO 4 JJ=1,K1
60 4      PRINT 9006,(Y(J,JJ),J=1,NN)
61      DO 12 JJ=1,K1
62      JI=NN*(JJ-1)
63      DO 12 II=1,NN
64      IJ=JI+II
65 12      P(IJ)=Y(II,JJ)
66      IFLAG=1
67      GAMA=0.99
68      ZERO=1.D-7
69      IMP=1
70      CALL CORRAL(P,K1,IFLAG,GAMA,ZERO,NN,IMP,D,S2,AL,JC,NC)
71      PRINT 9013,(D(I),I=1,NN)
72      TEST=.TRUE.
73      DN=0.D0
74      DO 11 I=1,NN
75 11      DN=DN+D(I)*D(I)
76      DN=DSQRT(DN)
77 C
78 C      X EST-IL UN POINT STATIONNAIRE !
79 C      OUI, SI 0 EST UN ELEMENT DU SOUS-DIFFERENTIEL ELARGI S(X,EPS,ET
80 C      NON, ALORS IL EXISTE UNE DIRECTION DE DESCENTE -D/DN
81 C
82      IF (DN.LT.1.D-10) GOTO 5
83      TEST=.FALSE.
84      DO 8 J=1,NN
85 8      D(J)=-D(J)/DN
86      PRINT 9009,(D(J),J=1,NN)
87 C
88 C      RECHERCHE UNIDIMENSIONNELLE DANS LA DIRECTION -D/DN
89 C
90      ALPHA=0.D0
91      KK=2
92      TESTE=.FALSE.
93      BMAX=0.D0
94      PRINT 9012
95      IF (ISUM.EQ.0) GOTO 6
96 C
97 C      DANS LE CAS D'UN PROBLEME DE MINISUM
98 C
99 13      CALL VDD1AD(KK,ALPHA,AMAX,MAXF,ABSACC,RELACC,XSTEP)
100      GOTO (110,102,103,104),KK

```



```

101 110 DO 222 I=1,N
102      DO 222 J=1,2
103      JJ=J+2*I-2
104 222 XK(I,J)=X(I,J)+ALPHA*D(JJ)
105      CALL SOMME(XK,AMAX)
106      PRINT 9020,ALPHA
107      IF (DABS(AMAX-BMAX).LT.1.D-12) GOTO 21
108      TESTE=.FALSE.
109      BMAX=AMAX
110      GOTO 13
111 21 IF (TESTE) GOTO 102
112      TESTE=.TRUE.
113      BMAX=AMAX
114      GOTO 13
115 C
116 C      DANS LE CAS D'UN PROBLEME DE MINIMAX
117 C
118 6 CALL VDD1AD(KK,ALPHA,AMAX,MAXF,ABSACC,RELACC,XSTEP)
119      GOTO (101,102,103,104),KK
120 101 DO 111 I=1,N
121      DO 111 J=1,2
122      JJ=J+2*I-2
123 111 XK(I,J)=X(I,J)+ALPHA*D(JJ)
124      CALL FONCT(XK,AMAX)
125      PRINT 9020,ALPHA
126      IF (DABS(AMAX-BMAX).LT.1.D-12) GOTO 20
127      TESTE=.FALSE.
128      BMAX=AMAX
129      GOTO 6
130 20 IF (TESTE) GOTO 102
131      TESTE=.TRUE.
132      BMAX=AMAX
133      GOTO 6
134 103 PRINT 9014
135 9014 FORMAT(///1X, ' ERREUR D'ARRONDI ')
136      RETURN
137 104 PRINT 9015
138 9015 FORMAT(///1X, ' TROP D'EVALUATIONS DE LA FONCTION ')
139      RETURN
140 102 PRINT 9016,ALPHA
141 9016 FORMAT(///1X, ' OPTIMUM ',F20.10)
142      PRINT 9017,AMAX
143 9017 FORMAT(///1X, ' VALEUR MINIMALE ACTUELLE DE LA FONCTION ',F20.10)
144      IF (ALPHA.LT.0.D0) RETURN
145      DO 7 I=1,N
146      DO 7 J=1,2
147      JJ=J+2*I-2
148 7 X(I,J)=X(I,J)+ALPHA*D(JJ)
149      PRINT 9019
150      DO 9 I=1,N

```



```

151      9 PRINT 9006,(X(I,J),J=1,2)
152 C
153 C      TEST D'ARRET
154 C      SI LA DECROISSANCE DE LA FONCTION N'EST PLUS SIGNIFICATIVE
155 C
156      DN=DABS(AMAX-AMAX1)/DABS(AMAX)
157      IF (DN.GT.1.D-10) GOTO 1000
158      DN=DABS(AMAX-AB)/DABS(AMAX)
159      IF (DN.LT.1.D-10) RETURN
160      AB=AMAX
161      GOTO 2
162      5 IF (TEST) PRINT 9021
163      DN=DABS(AMAX-AC)/DABS(AMAX)
164      IF (DN.LT.1.D-12) GOTO 16
165      TEP := .FALSE.
166      AC =AMAX
167      GOTO 2
168      16 IF (TEPS) RETURN
169      TEP := .TRUE.
170      AC=AMAX
171 C
172 C      REDEMARRAGE DE L'ALGORITHME A PARTIR DU DERNIER POINT
173 C      AVEC AJUSTEMENT DES PARAMETRES EPS ET ETA
174 C
175      2 IF (EPS.LT.1.D-10) RETURN
176      EPS=EPS/10.
177      ETA=ETA/10.
178      PRINT 9024
179      GOTO 1111
180 C
181      9003 FORMAT(/1X,' EPS = ',F12.10)
182      9004 FORMAT(/1X,' ETA = ',F12.10)
183      9006 FORMAT(/1X,10F13.3)
184      9009 FORMAT(/1X,' VECTEUR DE NORME MINIMALE NORME ',/,10(/1X,10F13.8))
185      9011 FORMAT(/1X,' MATRICE DES GRADIENTS = S(X,EPS,ETA) ')
186      9012 FORMAT(/1X,' RECHERCHE UNIDIMENSIONNELLE DANS LA DIRECTION DU VEC
187      CTEUR DE NORME MINIMALE DE S(X,EPS,ETA) ')
188      9013 FORMAT(/1X,' VECTEUR DE NORME MINIMALE DANS S(X,EPS,ETA)',/,10(/1X
189      C,10F13.8))
190      9018 FORMAT(/1X,' ITERATION NUMERO',I3)
191      9019 FORMAT(/1X,' POINT MINIMAL ACTUEL ')
192      9020 FORMAT(/1X,' PARAMETRE UNIDIMENSIONNEL ',D18.10)
193      9021 FORMAT(/1X,' LE POINT MINIMUM EST UN POINT STATIONNAIRE',/1X,42('*
194      C'))
195      9024 FORMAT(/1X,43('*'),/1X,' ** REDEMARRAGE A PARTIR DU DERNIER POIN
196      CT ** ',/2X,43('*'))
197      END

```

```

1      SUBROUTINE FONCT(X,AMAX)
2  C
3  C
4  C
5  C      DANS LE CAS D'UN PROBLEME DE MINIMAX
6  C      FONCT CALCULE LA VALEUR DE LA FONCTION MAX(F(I),I=1,2,...,P)
7  C      EN X
8  C
9  C      LISTE DES ARGUMENTS :
10 C      -----
11 C
12 C      AMAX : VALEUR DE LA FONCTION AU POINT X
13 C      F    : VECTEUR DES VALEURS DES M1 SOUS-FONCTIONS
14 C
15 C
16 C
17      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
18      COMMON N,M,A(150,10),W(150),ANORM(150)
19      COMMON /FX/ F(150) /SE/ IJKLMN
20      DIMENSION X(150,10)
21      AMAX=0.
22      II=0
23  C
24  C      CALCUL DES SOUS-FONCTIONS DE LA FORME
25  C      F(I)=LE PRODUIT DU POIDS W(I) PAR LA NORME ANORM(I) DE (X(K)-A(J))
26  C
27      DO 1 K=1,N
28      DO 1 I=1,M
29      II=II+1
30      F(II)=0.
31      DO 2 J=1,2
32  2 F(II)=F(II)+DABS(X(K,J)-A(I,J))*ANORM(II)
33      IF (IJKLMN.EQ.2) F(II)=F(II)*W(1./ANORM(II))
34      F(II)=W(II)*F(II)
35      IF (AMAX.LT.F(II))AMAX=F(II)
36  1 CONTINUE
37      IF (N.EQ.1) RETURN
38  C
39  C      CALCUL DES SOUS-FONCTIONS DE LA FORME
40  C      F(I)=LE PRODUIT DU POIDS W(I) PAR LA NORME ANORM(I) DE (X(K)-X(J))
41  C
42      NN=N-1
43      DO 3 K=1,NN
44      KK=K+1
45      DO 3 I=KK,N
46      II=II+1
47      F(II)=0.
48      DO 4 J=1,2
49  4 F(II)=F(II)+DABS(X(K,J)-X(I,J))*ANORM(II)
50      IF (IJKLMN.EQ.2) F(II)=F(II)*W(1./ANORM(II))

```

```
51      F(II)=W(II)*F(II)
52      IF (AMAX.LT.F(II))AMAX=F(II)
53 3     CONTINUE
54      RETURN
55      END
```

```

1      SUBROUTINE SOMME(X,AMAX)
2      C
3      C
4      C
5      C      DANS LE CAS D'UN PROBLEME DE MINISUM
6      C      SOMME CALCULE LA VALEUR DE LA FONCTION SOMME(F(I),I=1,2,...,P)
7      C      EN X
8      C
9      C      LISTE DES ARGUMENTS :
10     C      -----
11     C
12     C      AMAX   : VALEUR DE LA FONCTION AU POINT X
13     C      F      : VECTEUR DES VALEURS DES M1 SOUS-FONCTIONS
14     C
15     C
16     C
17     C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
18     C      COMMON N,M,A(150,10),W(150),ANORM(150)
19     C      COMMON /FX/F(150)/SE/ IJKLMN
20     C      DIMENSION X(150,10)
21     C      AMAX=0.
22     C      II=0
23     C
24     C      CALCUL DES SOUS-FONCTIONS DE LA FORME
25     C      F(I)=LE PRODUIT DU POIDS W(I) PAR LA NORME ANORM(I) DE (X(K)-A(J))
26     C
27     C      DO 1 K=1,N
28     C      DO 1 I=1,M
29     C      II=II+1
30     C      F(II)=0.
31     C      DO 2 J=1,2
32     C      2 F(II)=F(II)+DABS(X(K,J)-A(I,J))*ANORM(II)
33     C      IF (IJKLMN.EQ.2) F(II)=F(II)*(1./ANORM(II))
34     C      F(II)=W(II)*F(II)
35     C      AMAX=AMAX+F(II)
36     C      1 CONTINUE
37     C      IF (N.EQ.1) RETURN
38     C
39     C      CALCUL DES SOUS-FONCTIONS DE LA FORME
40     C      F(I)=LE PRODUIT DU POIDS W(I) PAR LA NORME ANORM(I) DE (X(K)-X(J))
41     C
42     C      NN=N-1
43     C      DO 3 K=1,NN
44     C      KK=K+1
45     C      DO 3 I=KK,N
46     C      II=II+1
47     C      F(II)=0.
48     C      DO 4 J=1,2
49     C      4 F(II)=F(II)+DABS(X(K,J)-X(I,J))*ANORM(II)
50     C      IF (IJKLMN.EQ.2) F(II)=F(II)*(1./ANORM(II))

```



```
51      F(II)=W(II)*F(II)
52      AMAX=AMAX+F(II)
53  3  CONTINUE
54      RETURN
55      END
```

```

1      SUBROUTINE RE(AMAX, EPS)
2      C
3      C
4      C
5      C      RE CALCULE L'ENSEMBLE DES INDICES ACTIFS R(X, EPS)
6      C
7      C      LISTE DES ARGUMENTS :
8      C      -----
9      C
10     C      IR      : VECTEUR DES INDICES ACTIFS DE DIMENSION M1
11     C                  IR(I)=1 SI I EST UN INDICE ACTIF
12     C                  IR(I)=0 SI I N'EST PAS UN INDICE ACTIF
13     C
14     C
15     C
16     C      IMPLICIT REAL *8 (A-H, O-Z)
17     C      COMMON /RX/IR(150) /FX/F(150)
18     C      COMMON /DIM/ M1
19     C      T=AMAX-EPS*AMAX
20     C      DO 1 I=1, M1
21     C      IR(I)=0
22     C      IF(T.LE.F(I))IR(I)=1
23     C      1 CONTINUE
24     C      PRINT 1000, (IR(I), I=1, M1)
25     C      1000 FORMAT(/, 1X, 'INDICES ACTIFS', 30I3)
26     C      RETURN
27     C      END

```

```

1      SUBROUTINE COMP
2 C
3 C
4 C
5 C      COMP TRAITE LE TABLEAU DES SOUS-GRADIENTS Y
6 C
7 C      LISTE DES ARGUMENTS :
8 C      -----
9 C
10 C      K      : NOMBRE DE SOUS-GRADIENTS
11 C              C-A-D NOMBRE DE COLONNES DE Y
12 C      NN     : NOMBRE DE COMPOSANTES DES SOUS-GRADIENTS
13 C              C-A-D NOMBRE DE LIGNES DE Y
14 C      Y      : MATRICE DES SOUS-GRADIENTS DE DIMENSION  $NN \times K = 2 \times N \times K$ 
15 C
16 C      K SERA A LA SORTIE LA PLACE QUE DEVRA OCCUPER LE PROCHAIN
17 C      SOUS-GRADIENT CALCULE
18 C
19 C
20 C
21      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
22      COMMON /GEN/ Y(10,150),K,NN
23      IF (K.EQ.1) GOTO 1
24      KK=K-1
25      DO 3 J=1,KK
26      DO 2 I=1,NN
27      IF (DABS(Y(I,J)-Y(I,K)).GT.1.D-10) GOTO 3
28 2 CONTINUE
29      GOTO 4
30 3 CONTINUE
31 1 K=K+1
32 4 RETURN
33      END

```

```

1      SUBROUTINE GRAD(X,K2,K4)
2 C
3 C
4 C
5 C      GRAD CALCULE LE GRADIENT D'UNE SOUS-FONCTION F(II)
6 C
7 C      LISTE DES ARGUMENTS :
8 C      -----
9 C
10 C      K4 = 0 SI F(II)=W(II)*LA NORME ANORM(II) DE (X(K)-A(J))
11 C          = J SI F(II)=W(II)*LA NORME ANORM(II) DE (X(K)-X(J))
12 C      K2 = K POUR F(II)=W(II)*LA NORME ANORM(II) DE (X(K)-A(J))
13 C          OU F(II)=W(II)*LA NORME ANORM(II) DE (X(K)-X(J))
14 C
15 C
16 C
17      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
18      COMMON N,M,A(150,10),W(150),ANORM(150)
19      COMMON /GEN/ Y(10,150),K,NN
20      COMMON /GRADS/I,LI,LIJ
21      COMMON /SE/ IJKLMN
22      DIMENSION X(150,10)
23      DO 1 J=1,NN
24 1     Y(J,K)=0.
25      IF(K4.GT.0) GOTO 2
26 C
27 C      CALCUL DU GRADIENT DANS LE CAS OU
28 C      F(II)=LE PRODUIT DU POIDS W(II) PAR LA NORME ANORM(II)
29 C      DE (X(K2)-A(J))
30 C
31      II=(K2-1)*M+I
32      DO 3 J=LI,LIJ
33      JJ=2*(K2-2)+J
34      BB=1.
35      IF((X(K2,J)-A(I,J)).LT.0.) BB=-1.
36      Y(JJ,K)=1.
37      GOTO(12,10,11),IJKLMN
38 10  AA=DABS(X(K2,1)-A(I,1))*ANORM(II)+DABS(X(K2,2)-A(I,2))*ANORM(II)
39      Y(JJ,K)=AA*(1./ANORM(II)-1.)*DABS(X(K2,J)-A(I,J))*ANORM(II)-1.
40      GOTO 12
41 11  Y(JJ,K)=ANORM(II)*DABS(X(K2,J)-A(I,J))*ANORM(II)-1.
42 12  Y(JJ,K)=Y(JJ,K)*BB*W(II)
43      3 CONTINUE
44      CALL COMP
45      RETURN
46 C
47 C      CALCUL DU GRADIENT DANS LE CAS OU
48 C      F(II)=LE PRODUIT DU POIDS W(II) PAR LA NORME ANORM(II)
49 C      DE (X(K2)-X(K4))
50 C

```



```

51      2 II=N*(M+K2-1)-K2*(K2+1)/2+K4
52      DO 4 J=LI,LIJ
53      JL=2*K2-2+J
54      JM=2*K4-2+J
55      BB=1.
56      IF ((X(K2,J)-X(K4,J)).LT.0.) BB=-1.
57      Y(JL,K)=1.
58      GOTO(15,13,14),IJKLMN
59      13 AA=(DABS(X(K2,1)-X(K4,1))*ANORM(II)+DABS(X(K2,2)-X(K4,2))*ANORM(
60      CII))*1./ANORM(II)-1.)
61      Y(JL,K)=AA*DABS(X(K2,J)-X(K4,J))*ANORM(II)-1.)
62      GOTO 15
63      14 Y(JL,K)=ANORM(II)*DABS(X(K2,J)-X(K4,J))*ANORM(II)-1.)
64      15 Y(JL,K)=Y(JL,K)+BB*W(II)
65      Y(JM,K)=-Y(JL,K)
66      4 CONTINUE
67      CALL COMP
68      RETURN
69      END

```

```

1      SUBROUTINE SSGRAD(X,JD,K2,K4)
2      C
3      C
4      C
5      C      SSGRAD CALCULE LES SOUS-GRADIENTS D'UNE SOUS-FONCTION F(II)
6      C      EN UN POINT DE NON DIFFERENTIABILITE
7      C
8      C      LISTE DES ARGUMENTS :
9      C      -----
10     C
11     C      K4 = 0 SI F(II)=W(II) LA NORME ANORM(II) DE (X(K)-A(J))
12     C      = J SI F(II)=W(II) LA NORME ANGRM(II) DE (X(K)-X(J))
13     C      K2 = K POUR F(II)=W(II) LA NORME ANORM(II) DE (X(K)-A(J))
14     C      OU F(II)=W(II) LA NORME ANORM(II) DE (X(K)-X(J))
15     C      JD = 1 SI F(II) EST NON DIFFERENTIABLE EN LA PREMIERE
16     C      COMPOSANTE DE X(K), UNIQUEMENT
17     C      = 2 SI F(II) EST NON DIFFERENTIABLE EN LA SECONDE
18     C      COMPOSANTE DE X(K), UNIQUEMENT
19     C      = 3 SI F(II) EST NON DIFFERENTIABLE EN LES DEUX
20     C      COMPOSANTES DE X(K)
21     C
22     C      LES SOUS-GRADIENTS SONT OBTENUS EN PRENANT LES NORMALES
23     C      AUX PLANS TANGENTS DETERMINES PAR LES COURBES NIVEAUX DE LA
24     C      SOUS-FONCTION AU VOISINAGE DU POINT DE NON DIFFERENTIABILITE
25     C
26     C
27     C
28     IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
29     DIMENSION X(150,10),Z(150,10)
30     THETA=1.D-5
31     IF (K4.NE.0) GOTO 5
32     IF (JD.EQ.3) GOTO 2
33     Z(K2,1)=X(K2,1)
34     Z(K2,2)=X(K2,2)
35     Z(K2,JD)=X(K2,JD)-THETA
36     CALL GRAD(Z,K2,K4)
37     Z(K2,JD)=X(K2,JD)+THETA
38     CALL GRAD(Z,K2,K4)
39     RETURN
40     2 Z(K2,1)=X(K2,1)+THETA
41     Z(K2,2)=X(K2,2)+THETA
42     CALL GRAD(Z,K2,K4)
43     Z(K2,1)=X(K2,1)-THETA
44     Z(K2,2)=X(K2,2)-THETA
45     CALL GRAD(Z,K2,K4)
46     Z(K2,1)=X(K2,1)-THETA
47     Z(K2,2)=X(K2,2)+THETA
48     CALL GRAD(Z,K2,K4)
49     Z(K2,1)=X(K2,1)+THETA
50     Z(K2,2)=X(K2,2)-THETA

```

```

51      CALL GRAD(Z,K2,K4)
52      RETURN
53      5 IF (JD.EQ.3) GOTO 8
54      DO 6 K3=1,2
55      DO 7 J=1,2
56      Z(K2,J)=X(K2,J)
57      7 Z(K4,J)=X(K4,J)
58      MM=K4
59      IF (K3.EQ.1) MM=K2
60      Z(MM,JD)=X(MM,JD)-THETA
61      CALL GRAD(Z,K2,K4)
62      Z(MM,JD)=X(MM,JD)+THETA
63      CALL GRAD(Z,K2,K4)
64      6 CONTINUE
65      RETURN
66      8 DO 9 KK=1,2
67      DO 10 J=1,2
68      Z(K2,J)=X(K2,J)
69      10 Z(K4,J)=X(K4,J)
70      MM=K4
71      IF (KK.EQ.1) MM=K2
72      Z(MM,1)=X(MM,1)+THETA
73      Z(MM,2)=X(MM,2)+THETA
74      CALL GRAD(Z,K2,K4)
75      Z(MM,1)=X(MM,1)-THETA
76      Z(MM,2)=X(MM,2)-THETA
77      CALL GRAD(Z,K2,K4)
78      Z(MM,1)=X(MM,1)-THETA
79      Z(MM,2)=X(MM,2)+THETA
80      CALL GRAD(Z,K2,K4)
81      Z(MM,1)=X(MM,1)+THETA
82      Z(MM,2)=X(MM,2)-THETA
83      CALL GRAD(Z,K2,K4)
84      9 CONTINUE
85      RETURN
86      END

```

```

1      SUBROUTINE SXEPS(X, EPS, ETA, LL, ISUM)
2 C
3 C
4 C
5 C      *      SXEPS CALCULE LE SOUS-DIFFERENTIEL ELARGI Y AU POINT X .
6 C      *      S(X, EPS, ETA) TIEN COMPT DES SOUS-FONCTIONS F(I) PROCHES
7 C      *      A EPS PRES DE LA FONCTION MAXIMALE ET DES POINTS DE NON
8 C      *      DIFFERENTIABILITE DES F(I) DANS UN VOISINAGE DE RAYON ETA
9 C      *      AUTOUR DE X
10 C
11 C      *      LISTE DES ARGUMENTS :
12 C      *      -----
13 C
14 C      *      LL = 1 SI F(I) EST DECOMPOSEE EN SOMME DE 2 FONCTIONS F(I, J)
15 C      *      = 2 SI F(I) N'EST PAS DECOMPOSEE EN UNE SOMME
16 C      *      DE FONCTIONS F(I, J)
17 C
18 C
19 C
20      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
21      COMMON N, M, A(150, 10), W(150), ANORM(150)
22      COMMON /GEN/ Y(10, 150), K, NN
23      COMMON /GRADS/ I, LI, LIJ /RX/ IR(150)
24      COMMON /SE/ IJKLMN
25      DIMENSION X(150, 10), Z(150, 10)
26      IF (ISUM.EQ.0) GOTO 4
27      CALL SOMME(X, AMAX)
28      DO 8 II=1, M1
29      8 IR(II)=1
30      GOTO 14
31      4 CALL FONCT(X, AMAX)
32      CALL RE(AMAX, EPS)
33      14 K=1
34      II=0
35      K4=0
36 C
37 C      CALCUL DU SOUS-DIFFERENTIEL POUR LES SOUS-FONCTIONS DE LA FORME
38 C      F(II) = W(II)* NORME ANORM(II) DE (X(K)-A(J))
39 C
40      DO 1 KL=1, N
41      DO 2 I=1, M
42      II=II+1
43 C
44 C      II EST-IL UN INDICE ACTIF !
45 C
46      IF (IR(II).NE.1) GOTO 2
47      JD=0
48      LI=1
49      DO 3 LIJ=LL, 2
50      GOTO(24, 25, 23), IJKLMN

```



```

51      23 CALL GRAD(X,KL,K4)
52      GOTO 3
53 C
54 C      DANS LE CAS DE LA NORME 1.
55 C      RECHERCHE DU GENRE DE NON DIFFERENTIABILITE DU POINT CONSIDERE
56 C
57      24 DO 7 J=LI,LIJ
58          IF (DABS(X(KL,J)-A(I,J)).LT.1.D-9) JD=JD+J
59      7 CONTINUE
60          IF (JD.EQ.0) CALL GRAD(X,KL,K4)
61          IF (JD.NE.0) CALL SSGRAD(X,JD,KL,K4)
62          JD=0
63 C
64 C      Y A-T-IL DES POINTS DE NON DIFFERENTIABILITE DANS LE VOISINAGE !
65 C
66      DO 9 J=LI,LIJ
67          IF (DABS(X(KL,J)-A(I,J)).LE.ETA) JD=JD+J
68      9 CONTINUE
69          IF (JD.EQ.0) GOTO 3
70          IF (JD.EQ.3) GOTO 101
71          Z(KL,1)=X(KL,1)
72          Z(KL,2)=X(KL,2)
73          Z(KL,JD)=A(I,JD)
74          GOTO 13
75      101 DN=DABS(X(KL,1)-A(I,1))**2+DABS(X(KL,2)-A(I,2))**2
76          DN=DSQRT(DN)
77          IF (DN.LE.ETA) GOTO 10
78          DO 50 JD=1,2
79              Z(KL,1)=X(KL,1)
80              Z(KL,2)=X(KL,2)
81              Z(KL,JD)=A(I,JD)
82      50 CALL SSGRAD(Z,JD,KL,K4)
83          GOTO 3
84      10 Z(KL,1)=A(I,1)
85          Z(KL,2)=A(I,2)
86      13 CALL SSGRAD(Z,JD,KL,K4)
87          GOTO 3
88 C
89 C      DANS LE CAS D'UNE NORME DISTINCTE DE 1.
90 C      RECHERCHE DU GENRE DE NON DIFFERENTIABILITE DU POINT CONSIDERE
91 C
92      25 DO 5 J=LI,LIJ
93          IF (DABS(X(KL,J)-A(I,J)).LT.1.D-9) JD=JD+J
94      5 CONTINUE
95          IF (JD.NE.3) CALL GRAD(X,KL,K4)
96          IF (JD.EQ.3) CALL SSGRAD(X,JD,KL,K4)
97          JD=0
98 C
99 C      Y A-T-IL DES POINTS DE NON DIFFERENTIABILITE DANS LE VOISINAGE !
100 C

```

```

101      DO 6 J=LI,LIJ
102      IF (DABS(X(KL,J)-A(I,J)).LE.ETA) JD=JD+J
103      6 CONTINUE
104      IF (JD.NE.3) GOTO 3
105      DN=DABS(X(KL,1)-A(I,1))**2+DABS(X(KL,2)-A(I,2))**2
106      DN=DSQRT(DN)
107      IF (DN.GT.ETA) GOTO 3
108      Z(KL,1)=A(I,1)
109      Z(KL,2)=A(I,2)
110      CALL SSGRAD(Z,JD,KL,K4)
111      3 LI=LI+1
112      2 CONTINUE
113      1 CONTINUE
114      IF (N.EQ.1) RETURN
115 C
116 C      CALCUL DU SOUS-DIFFERENTIEL POUR LES SOUS-FONCTIONS DE LA FORME
117 C      F(II) = W(II)* NORME ANORM(II) DE (X(K)-X(J))
118 C
119      NNN=N-1
120      DO 15 KL=1,NNN
121      KK=KL+1
122      DO 15 KM=KK,N
123      II=II+1
124 C
125 C      II EST-IL UN INDICE ACTIF !
126 C
127      IF (IR(II).NE.1) GOTO 15
128      JD=0
129      LI=1
130      DO 16 LIJ=LL,2
131      GOTO(17,19,18),IJKLMN
132      18 CALL GRAD(X,KL,KM)
133      GOTO 16
134 C
135 C      DANS LE CAS DE LA NORME 1.
136 C      RECHERCHE DU GENRE DE NON DIFFERENTIABILITE DU POINT CONSIDERE
137 C
138      17 DO 20 J=LI,LIJ
139      IF (DABS(X(KL,J)-X(KM,J)).LT.1.D-9) JD=JD+J
140      20 CONTINUE
141      IF (JD.EQ.0) CALL GRAD(X,KL,KM)
142      IF (JD.NE.0) CALL SSGRAD(X,JD,KL,KM)
143      JD=0
144 C
145 C      Y A-T-IL DES POINTS DE NON DIFFERENTIABILITE DANS LE VOISINAGE !
146 C
147      DO 22 J=LI,LIJ
148      IF (DABS(X(KL,J)-X(KM,J)).LE.ETA) JD=JD+J
149      22 CONTINUE
150      IF (JD.EQ.0) GOTO 16

```

```

151      IF (JD.NE.3) GOTO 70
152      DN=DABS(X(KL,1)-X(KM,1))**2+DABS(X(KL,2)-X(KM,2))**2
153      DN=DSQRT(DN)
154      IF (DN.LE.ETA) GOTO 70
155      DO 80 JD=1,2
156      80 CALL SSGRAD(X,JD,KL,KM)
157      GOTO 16
158      70 CALL SSGRAD(X,JD,KL,KM)
159      GOTO 16
160 C
161 C      DANS LE CAS D'UNE NORME DISTINCTE DE 1.
162 C      RECHERCHE DU GENRE DE NON DIFFERENTIABILITE DU POINT CONSIDERE
163 C
164      19 DO 11 J=LI,LIJ
165      IF (DABS(X(KL,J)-X(KM,J)).LT.1.D-9) JD=JD+J
166      11 CONTINUE
167      IF (JD.NE.3) CALL GRAD(X,KL,KM)
168      IF (JD.EQ.3) CALL SSGRAD(X,JD,KL,KM)
169      JD=0
170 C
171 C      Y A-T-IL DES POINTS DE NON DIFFERENTIABILITE DANS LE VOISINAGE !
172 C
173      DO 12 J=LI,LIJ
174      IF (DABS(X(KL,J)-X(KM,J)).LE.ETA) JD=JD+J
175      12 CONTINUE
176      IF (JD.NE.3) GOTO 16
177      DN=DABS(X(KL,1)-X(KM,1))**2+DABS(X(KL,2)-X(KM,2))**2
178      DN=DSQRT(DN)
179      IF (DN.GT.ETA) GOTO 16
180      CALL SSGRAD(X,JD,KL,KM)
181      16 LI=LI+1
182      15 CONTINUE
183      RETURN
184      END

```

#### V.4. Résultats numériques

Trois types principaux de problèmes peuvent être décrits par le genre de problème minimax considéré, avec les hypothèses imposées sur les fonctions.

##### V.4.1. Problèmes minimax de localisation.

Le problème à résoudre est  $\min_{x \in R^n} \max \{ f_i(x) : i \in \bar{p} \}$

où les fonctions  $f_i$  sont du type

$$\text{soit } w_{ki} \| x_k - a_i \|_{p_{ki}}^{(p_{ki})} \text{ pour } p_{ki} \text{ tel que } 1 \leq p_{ki} \leq +\infty$$

$$\text{soit } v_{kj} \| x_k - x_j \|_{q_{kj}}^{(q_{kj})} \text{ pour } q_{kj} \text{ tel que } 1 \leq q_{kj} \leq +\infty$$

avec  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_r) \in R^n$  et  $x_k \in R^2$  pour  $k=1, 2, \dots, r$   
et donc  $n=2.r$

Les  $a_i$  sont interprétés comme des localisations connues dans le plan  $R^2$  et les  $x_k$  sont de nouvelles localisations à déterminer, tandis que les  $w_{ki}$  et  $v_{kj}$  sont des poids positifs.

De nombreux problèmes de ce type ont été traités sur ordinateur. Nous avons représenté graphiquement les résultats de trois d'entre eux à la page 121.

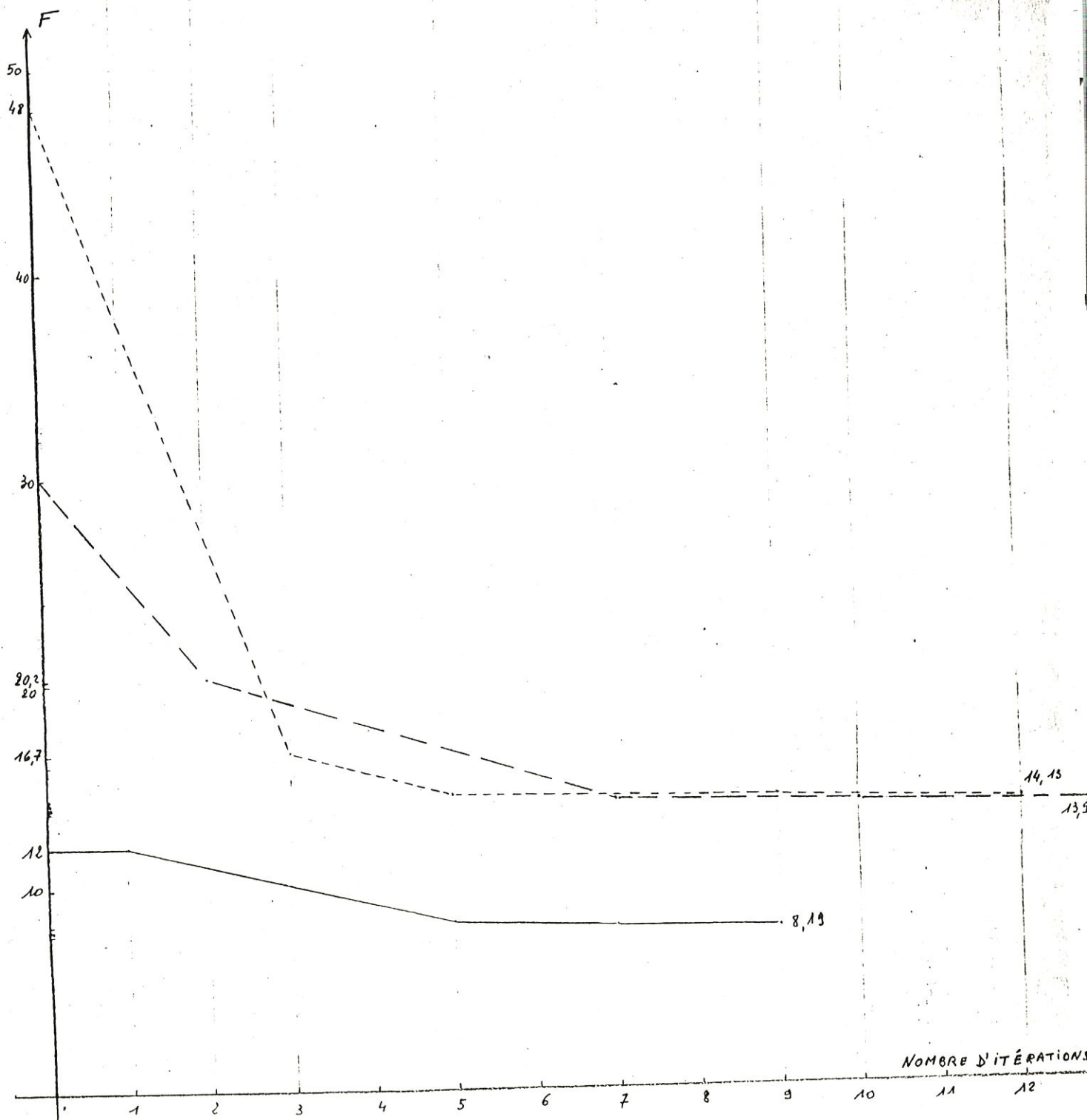
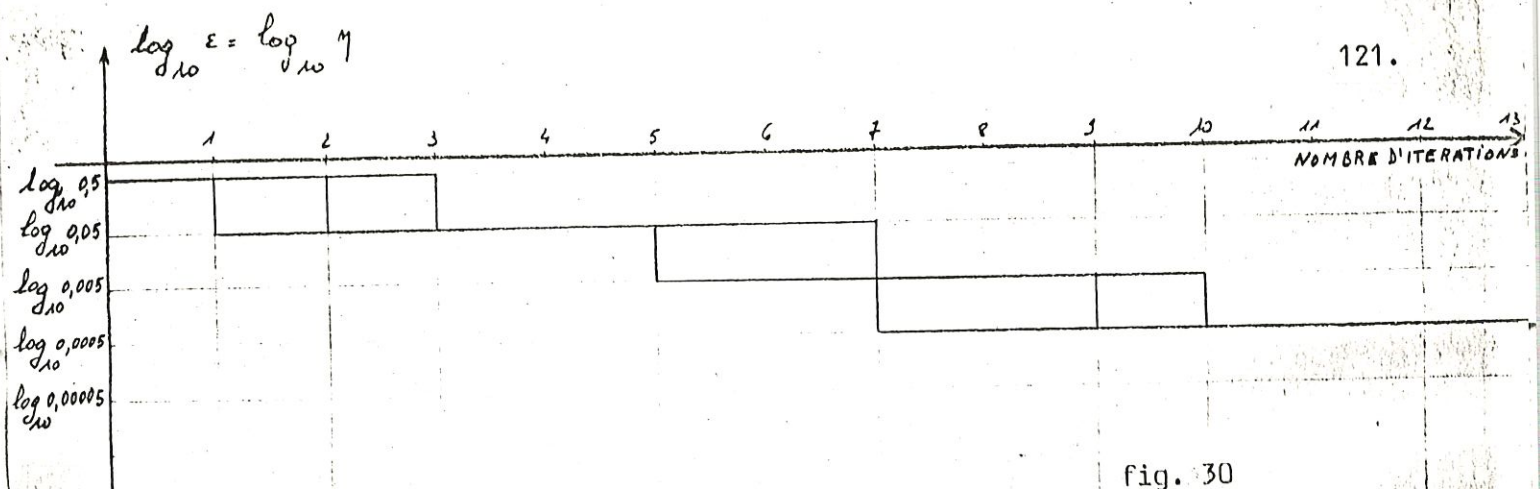
Il s'agit des problèmes suivants :

- \* Recherche de la situation de 3 points de  $R^2$  étant donnés 3 autres points fixes. Le problème est posé en norme 1. Les poids sont donnés par le tableau ci-dessous

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_1$	3	3	2	-	3	3
$x_2$	2	3	3	-	-	3
$x_3$	3	2	3	-	-	-

où  $a_1 = (0., 0.)$ ,  $a_2 = (2., 3.46)$ ,  $a_3 = (4., 0.)$





Le point initial choisi est  $x_1 = x_2 = x_3 = (1., 1.)$ .

C'est la représentation en trait continu de F à la figure 30.

\* Le problème est identique au précédent mais considéré en norme 2 .

C'est la représentation en traits discontinus de F à la figure 30 .

\* Il s'agit de situer 3 points du plan  $R^2$  étant donnés 3 points fixés :

$$a_1 = (0., 0.), a_2 = (2., 3.46), a_3 = (4., 0.).$$

La norme utilisée est la norme euclidienne et les points initiaux sont

$$x_1 = x_2 = x_3 = (0., 0.).$$

Les poids sont identiques à ceux des problèmes précédents à part les

$$v_{kj} = 50.$$

C'est la représentation en pointillés de F à la figure 30.

Chacun de ces exemples, grâce aux réductions successives des paramètres  $\epsilon$  et  $\eta$ , s'arrête finalement en un point stationnaire en lequel la fonction atteint effectivement son minimum. Chaque "coin" dans la représentation de la décroissance de la fonction, donnée par l'algorithme, indique que celui-ci s'arrête en un point stationnaire et qu'une réduction des paramètres  $\epsilon$  et  $\eta$  a été effectuée afin de redémarrer l'algorithme pour approcher plus précisément le minimum de la fonction. Le graphe supérieur donne la valeur de  $\epsilon$  et  $\eta$  correspondante au moment de l'arrêt de l'algorithme en chacun des points stationnaires.

#### V.4.2. Problèmes minisomme de localisation.

C'est le cas de  $p=1$ . Vu que, par hypothèse,  $f_i(x) = \sum_{j=1}^1 f_{ij}(x)$

pour  $i \in \bar{p}$ , le problème  $\min_{x \in R^n} F(x)$  où  $F(x) = \max \{ f_i(x) : i \in \bar{p} \}$

se réduit donc à  $\min_{x \in R^n} F(x)$  où  $F(x) = f_1(x) = \sum_{j=1}^1 f_{1j}(x)$ .

Il s'agit donc de minimiser une somme de fonctions convexes non nécessairement différentiables mais LFS .

En particulier, celles-ci peuvent être semblables aux fonctions  $f_i$  considérées dans les problèmes minimax de localisation puisqu'elles sont LFS (il n'est donc plus indispensable de les décomposer en somme de fonctions  $f_{ij}$  LFS).

Cependant le problème ne consiste plus à découvrir la localisation de  $r$  points de  $R^2$  tels que ceux-ci rendent minimum la plus grande distance entre tous les points fixes ou à situer, considérés deux à deux. Cette fois-ci, il faut découvrir les localisations des  $r$  points de  $R^2$  qui rendent minimum la somme de toutes les distances entre deux points quelconques appartenant à l'ensemble de tous les points fixés et de tous les points à situer.

Lorsque  $p=1$ , l'ensemble des indices actifs comporte un seul élément :  $R(x, \varepsilon) = \{ i \in \bar{p} : f_i(x) \geq F(x) - \varepsilon F(x) \} = \{ 1 \}$

car  $F(x) = \max \{ f_i(x) : i \in \bar{p} \} = f_1(x)$

Donc toutes les fonctions  $f_{1j}$  seront prises en considération dans le

calcul de  $S(x, \varepsilon, \eta) = \text{Co} ( S_1(x, \eta) )$  où  $S_1(x, \eta) = \sum_{j=1}^1 \partial f_{1j}(G_{1j}(x, \eta))$

En fait, nous constatons que le paramètre  $\varepsilon$  introduit pour tenir compte des fonctions  $f_i$  proches de la fonction objective maximale  $F$  n'intervient plus. Dès lors le sous-différentiel n'est élargi que par la recherche de points de non différentiabilité dans un voisinage de l'itérée.

Par conséquent, malgré les réductions successives du paramètre  $\eta$  lorsqu'un point stationnaire est obtenu, nous n'avons pas pu atteindre avec une aussi bonne précision la valeur minimale de la fonction objective  $F$  puisque le paramètre  $\varepsilon$  ne joue plus aucun rôle. C'est là une constante remarquée à travers les quelques exemples de problèmes minisomme de localisation que nous avons traités.

#### V.4.3. Problèmes d'approximation.

---

Un problème d'approximation linéaire peut être formulé comme suit  $\min_{x \in R^n} K(Ax-b)$  où  $A$  est une matrice  $m \times n$  et  $b$  un vecteur de  $R^m$ , et où  $K$  est une norme sur  $R^m$  mesurant le lien entre un point  $b$  désiré et une approximation  $Ax$  de ce point. Généralement le choix de  $K$  est la norme  $l_1$  ou la norme  $l_\infty$  de sorte que le problème se réduit

$$\text{soit à } \min_{x \in R^n} \sum_{i=1}^m |(Ax)_i - b_i|$$

c'est-à-dire à un problème de minisomme

$$\text{soit à } \min_{x \in R^n} \max \left\{ |(Ax)_i - b_i| \text{ où } i \in \bar{p} \right\}$$

c'est-à-dire à un problème de minimax

Ce ne sont donc que des cas particuliers des deux problèmes précédents.

#### V.4.4. Conclusions de l'implémentation.

---

Les quelques résultats qui ont été présentés se réfèrent à des problèmes traités en ne décomposant pas les fonctions  $f_i$  en une somme d'autres fonctions LFS  $f_{ij}$  plus simples. Cependant le programme a toujours tourné en considérant les deux cas :

- $f_i$  non décomposée ( cela est possible si elle est LFS )
- $f_i$  décomposée en une somme de deux fonctions  $f_{ij}$  LFS

Cela nous a permis de remarquer une constante : la convergence de l'algorithme est généralement plus lente en décomposant les fonctions  $f_i$ . Non seulement le nombre d'itérations est plus important mais les points stationnaires sont obtenus plus tôt.



Aussi l'approximation de la valeur minimale de la fonction  $F$  est-elle encore relativement grossière au moment où le programme stoppe ( c'est-à-dire quand les paramètres  $\epsilon$  et  $\eta$  atteignent la borne  $10^{-10}$  ).

Et cela alors que, dans la plupart des cas avec les fonctions  $f_i$  non décomposées, la valeur minimale de  $F$  est approximée à plus de  $10^{-2}$  près avec une valeur des paramètres  $\epsilon$  et  $\eta$  le plus souvent comprise entre  $10^{-4}$  et  $10^{-6}$  .

Cela se remarque de façon très nette dans le problème du triangle [ 5 ], traité en norme 1 , dont les résultats sont repris aux tableaux 2 et 3 .

PROBLEME RESOLU AVEC 1 FONCTION  $f_{ij}$  .

Itération k	$\epsilon = \eta$	$F(x_k)$	Qualité du point $x_k$
0	-	600.	initial
1	$5 \cdot 10^{-1}$	12.	-
2	$5 \cdot 10^{-1}$	12.	stationnaire
3	$5 \cdot 10^{-2}$	8.26062882	-
4	$5 \cdot 10^{-2}$	8.26062882	stationnaire
5	$5 \cdot 10^{-3}$	8.19610736	-
6	$5 \cdot 10^{-3}$	8.19610736	stationnaire
7	$5 \cdot 10^{-4}$	8.19143376	-
8	$5 \cdot 10^{-4}$	8.19143376	stationnaire
9	$5 \cdot 10^{-5}$	8.19000000	-
10	$5 \cdot 10^{-5}$	8.19000000	stationnaire
11	$5 \cdot 10^{-6}$	8.19000000	stationnaire
12	$5 \cdot 10^{-7}$	8.19000000	stationnaire

Tableau 2.

Tableau 3. PROBLEME RESOLU AVEC 2 FONCTIONS  $f_{ij}$

Itération k	$\epsilon = \eta$	$F(x_k)$	Qualité du point $x_k$
0	-	600.	initial
1	$5.10^{-1}$	12.	-
2	$5.10^{-1}$	12.	stationnaire
3	$5.10^{-2}$	8.26062882	-
4	$5.10^{-2}$	8.26062882	stationnaire
5	$5.10^{-3}$	8.19610736	-
6	$5.10^{-3}$	8.19610736	stationnaire
7	$5.10^{-4}$	8.19610736	stationnaire
8	$5.10^{-5}$	8.19323985	-
9	$5.10^{-5}$	8.19224722	-
10	$5.10^{-5}$	8.19020350	-
11	$5.10^{-5}$	8.19020350	stationnaire
12	$5.10^{-6}$	8.19005917	-
13	$5.10^{-6}$	8.19000276	-
14	$5.10^{-6}$	8.19000276	stationnaire
15	$5.10^{-7}$	8.19000276	stationnaire
16	$5.10^{-8}$	8.19000030	-
17	$5.10^{-8}$	8.19000008	-
18	$5.10^{-8}$	8.19000008	stationnaire
19	$5.10^{-9}$	8.19000000	-
20	$5.10^{-9}$	8.19000000	stationnaire
21	$5.10^{-10}$	8.19000000	stationnaire
22	$5.10^{-11}$	8.19000000	-

D'autre part, ce qui n'apparaît pas dans les exemples cités mais qui s'est heureusement révélé au cours des expériences est le fait suivant : quelque soit le point de départ initial choisi, l'algorithme converge vers un point stationnaire. Celui-ci engendre toujours une valeur de la fonction dont la différence par rapport à la valeur minimale est largement inférieure à l'unité. Autrement dit, bien que l'algorithme procède généralement à un plus grand nombre d'itérations en partant d'un point plus éloigné du minimum, il vérifie bien sa propriété de convergence globale.

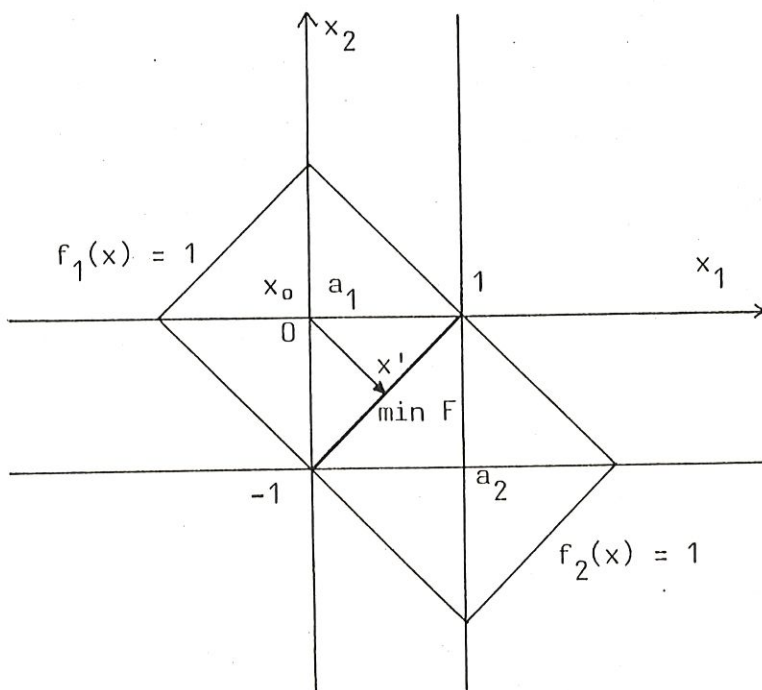
Voici le chemin suivi par l'algorithme dans le plan  $\mathbb{R}^2$  lorsque nous considérons différents points de départ pour un même problème. Nous recherchons la localisation d'un point de  $\mathbb{R}^2$ , étant donné deux points fixés, en minimisant la plus grande distance, mesurée par la norme rectangulaire entre ces trois points.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} F(x) \quad \text{où} \quad F(x) = \max \{ f_1(x), f_2(x) \}$$

$$\text{avec} \quad f_1(x) = \|x - (0., 0.)\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

$$f_2(x) = \|x - (1., -1.)\|_1 = |x_1 - 1.| + |x_2 + 1.|$$

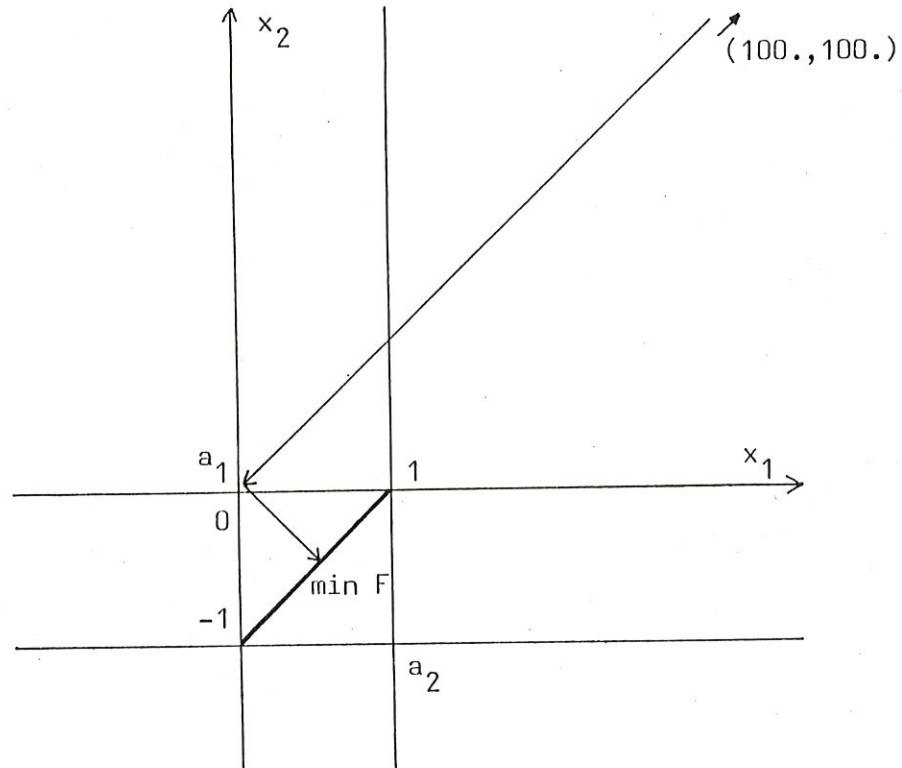
fig. 31



La figure 31 représente les courbes de niveau des deux sous-fonctions  $f_1$  et  $f_2$ , ainsi que le segment de droite de points minimaux de  $F$ . L'algorithme démarre au point initial  $(0., 0.)$  et en une seule direction de descente  $(1., -1.)$  atteint ce segment au point  $(0.5, 0.5)$ .

La figure 32 représente les deux directions de descente  $(-1., -1.)$  et  $(1., -1.)$  empruntées successivement par l'algorithme pour aboutir au point  $(0.57, -0.42)$  en deux itérations seulement, étant parti du point  $(100., 100.)$ .

fig. 32



La figure 33 met encore plus en évidence ce phénomène de convergence globale. Puisque partant du point  $(-200., 1000.)$ , en 9 itérations, l'algorithme atteint le point stationnaire  $x' = (0.11, -0.88)$  qui est un point du segment sur lequel  $F$  atteint son minimum. (Etant donné que les composantes du point initial  $x_0 = (-200., 1000.)$  sont de l'ordre de  $10^3$ , le point stationnaire  $x' = (0.11, -0.88)$  est représenté à peu près à l'origine à cause de l'échelle choisie.)



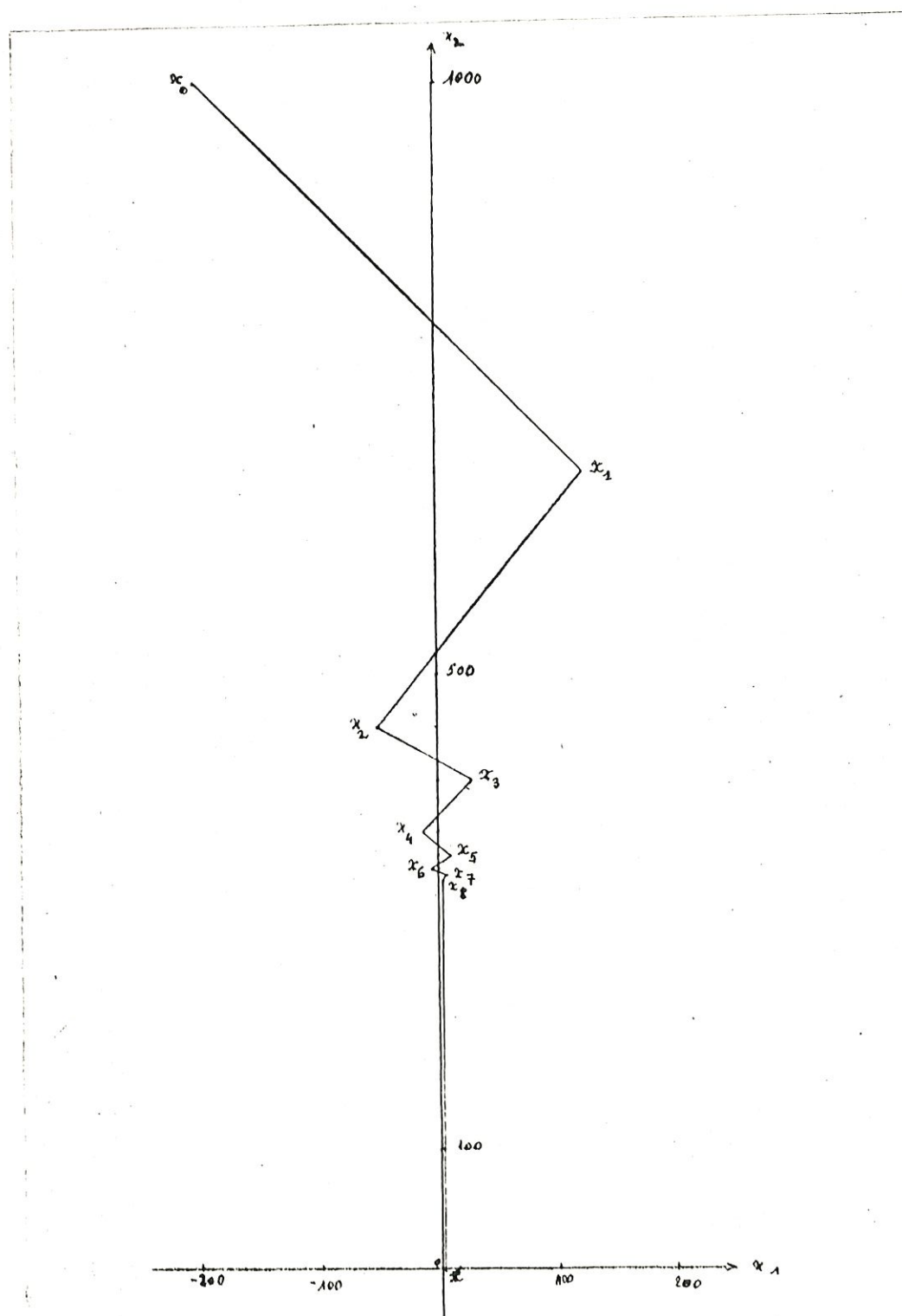


fig. 33

De plus, les exemples traités donnaient lieu à une convergence de l'algorithme vers un point stationnaire. Un seul cas a donné lieu à l'arrêt de l'algorithme par le test indiquant que la direction de descente trouvée ne générât pas un point permettant d'améliorer la valeur de la fonction objective ; en bref, la direction de descente n'était plus significative.

En effet, les directions de descente successives, précédant l'arrêt de l'algorithme se rapprochent de plus en plus du vecteur nul. Ainsi, il semble que, dans ce cas, la borne fixée à  $10^{-10}$  sur la norme de la direction de descente pour conclure que le point en question est un point stationnaire, soit trop sévère.

Par contre, si nous réduisons la valeur des paramètres  $\epsilon$  et  $\eta$ , l'algorithme parvient à ce moment-là à découvrir une nouvelle direction de descente significative mais de norme faible ( $\approx 10^{-5}$ ) pour une diminution de la valeur de la fonction inférieure à 0.3. Et ensuite, l'algorithme s'arrête après quelques itérations, à nouveau, à cause d'une direction de descente non significative, étant donné que la différence relative entre les deux dernières valeurs de la fonction est inférieure en valeur absolue à  $10^{-10}$ .

Voici le détail des résultats de cet exemple. C'est celui concernant les deux bateaux dans la mer des Caraïbes que nous avons présenté dans le premier chapitre.

Il s'agissait de situer 2 points, en l'occurrence des navires, connaissant 9 cités parmi les îles de la mer des Caraïbes.

Voici les points fixes ainsi que les poids et normes correspondants.

	$w_{1i}$	$p_{1i}$	$w_{2i}$	$p_{2i}$
$a_1 = ( 11.4 , 11.6 )$	2.0	2.0	1.0	2.0
$a_2 = ( 35.3 , 13.5 )$	1.0	2.0	2.0	2.0
$a_3 = ( 8.8 , 37.2 )$	1.5	1.1	1.0	1.4
$a_4 = ( 20.9 , 30.6 )$	1.5	1.5	1.0	1.9
$a_5 = ( 25.5 , 28.0 )$	1.5	1.4	1.5	1.2
$a_6 = ( 29.7 , 27.7 )$	1.0	2.0	1.5	2.0
$a_7 = ( 36.2 , 27.8 )$	0.5	1.8	1.0	1.7
$a_8 = ( 45.5 , 21.3 )$	0.5	2.0	0.5	2.0
$a_9 = ( 15.8 , 28.2 )$	0.5	1.1	0.5	1.8

Quant à la distance entre les deux navires, elle est mesurée grâce à la distance euclidienne, et le poids correspondant est fixé à l'unité.

Les résultats principaux sont les suivants :

$$\text{étant donné un point initial } X = \begin{pmatrix} 20. & 20. \\ 25. & 25. \end{pmatrix}$$

en lequel F vaut 40.08828

avec les paramètres  $\epsilon$  et  $\eta$  fixés tous deux à 0.5 .

Après 3 itérations, l'algorithme obtient un point stationnaire.

La valeur de la fonction y est de 37.304930

$$\text{et le point } X \text{ obtenu est } \begin{pmatrix} 16.75701 & 20.01135 \\ 18.42510 & 21.44684 \end{pmatrix}$$

L'algorithme procède à un réajustement des paramètres  $\epsilon$  et  $\eta$  qui valent alors 0.05 chacun.

Voici sous forme de tableau comment l'algorithme poursuit :

iter	direction de descente	F(X)	X
1	( 0.67934 , -0.73373 , -0.89514 , 0.42154 )	26.682028	$\begin{pmatrix} 13.11015 & 23.95018 \\ 23.23037 & 19.18390 \end{pmatrix}$
2	( 0.00000 , 0.00000 , -0.15598 , -0.23684 )	26.412417	$\begin{pmatrix} 13.11015 & 23.95018 \\ 24.27089 & 20.76379 \end{pmatrix}$
3	( 0.00000 , 0.00000 , -0.09675 , -0.12434 )	26.330333	$\begin{pmatrix} 13.11015 & 23.95018 \\ 24.90978 & 21.58486 \end{pmatrix}$
10	( 0.00000 , 0.00000 , -0.00157 , -0.00167 )	26.295200	$\begin{pmatrix} 13.08590 & 23.97643 \\ 25.72771 & 22.51281 \end{pmatrix}$

Ensuite la direction de descente décroît encore en norme jusqu'à :

18	( 0.00000 , 0.00000 , -0.00001 , -0.00001 )	26.295192	$\begin{pmatrix} 13.08588 & 23.97642 \\ 25.74012 & 22.52596 \end{pmatrix}$
----	---	-----------	--

La direction de descente étant alors estimée donner une décroissance non significative de la fonction, les paramètres  $\varepsilon$  et  $\eta$  sont à nouveau réajustés à  $\varepsilon = \eta = 0.005$

Ce qui donne lieu au tableau suivant

iter	direction de descente	F(X)	X
1	( 0.00000, 0.00000, -1.45423, 1.37302 )	26.083555	$\begin{pmatrix} 13.08588 & 23.97642 \\ 25.81706 & 22.45331 \end{pmatrix}$
2	( 0.00000, 0.00000, -0.00004, -0.00005 )	26.083554	$\begin{pmatrix} 13.08588 & 23.97642 \\ 25.81737 & 22.45364 \end{pmatrix}$

Etant donné la précision exigée pour estimer que la décroissance n'est plus significative, l'algorithme ne s'arrête qu'à la 4<sup>e</sup> itération avec une valeur de  $F = 26.08355498$

$$\text{pour un point } X = \begin{pmatrix} 13.08588 & 23.97642 \\ 25.81764 & 22.45392 \end{pmatrix}$$

Ensuite, l'algorithme procède encore à un réajustement des paramètres  $\varepsilon$  et  $\eta$  pour être certain que ce dernier n'engendre pas encore une décroissance de la fonction bien que la direction de descente obtenue avec les paramètres antérieurs soit devenue non significative. Après une itération, la réponse à cette question étant négative, l'algorithme s'arrête alors définitivement.

Au travers des exemples traités ( et plus particulièrement grâce à celui concernant les îles Caraïbes ), nous avons pu remarquer que les valeurs des paramètres  $\varepsilon$  et  $\eta$  jouent un rôle déterminant.

Or ceux-ci, non seulement, ont toujours varié par paire de façon identique mais, de plus, cette variation par réductions successives a été fixée arbitrairement. En effet, nous aurions pu imaginer d'autres méthodes plus souples qu'une simple division des paramètres par 10 à chaque point stationnaire ou lors d'une décroissance non significative de la fonction, dans une direction.



Ainsi, entrevoyons-nous une amélioration possible dans l'implémentation de cet algorithme. Il serait peut-être intéressant d'approfondir les effets exacts des deux paramètres d'élargissement du sous-différentiel classique afin de découvrir un chemin plus rapide vers un point stationnaire avec une approximation choisie du minimum. Cela serait possible à condition de construire un ajustement des paramètres adapté à la situation à chaque étape. Certes, il ne s'agit là que d'une voie vers une amélioration possible parmi beaucoup d'autres encore à imaginer.

## BIBLIOGRAPHIE

- 1 J. CHATELON, D. W. HEARN and T. J. LOWE  
" A subgradient algorithm for certain minimax and minisum problems "  
Department of Industrial and Systems Engineering  
Research Report 77-1 , University of Florida (1977)
- 2 F. H. CLARKE  
" Generalized gradients and applications "  
Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975) 247-262
- 3 J. CULLUM, W. E. DONATH and P. WOLFE  
" The minimization of certain nondifferentiable sums of eigenvalues  
of symmetric matrices "  
Mathematical Programming Study 3 (1975) 35-55
- 4 V. F. DEM'YANOV and V. N. MALOZEMOV  
" Introduction to minimax "  
John Wiley , 1974
- 5 J. ELZINGA, D. W. HEARN and W. D. RANDOLPH  
" Minimax multifacility location with Euclidean distances "  
Transportation Science (1976)
- 6 D. W. HEARN and T. J. LOWE  
" A subgradient procedure for the solution of minimax location problems "  
Department of Industrial and Systems Engineering  
Research Report 76-6 , University of Florida (1976)
- 7 H. W. KUHN and R. E. KUENNE  
" An efficient algorithm for the numerical solution of the generalized  
Weber problem in spatial economics "  
Journal of Regional Science 4 (1962) 21-33

- 8 C. LEMARECHAL  
" An extension of Davidon methods to nondifferentiable functions "  
Mathematical Programming Study 3 (1975) 95-109
- 9 D. G. LUENBERGER  
" Introduction to linear and nonlinear programming "  
Addison-Wesley , 1973
- 10 B. T. POLYAK  
" A general method of solving extremum problems "  
Soviet Math. Dokl. , vol. 8 , (1967) , No. 3
- 11 B. T. POLYAK  
" Minimization of unsmooth functionals "  
U.S.S.R. Computational and Mathematical Physics, 14-19 , (1969)
- 12 R. T. ROCKAFELLAR  
" Convex analysis "  
Princeton University Press , 1970
- 13 M. SIMMONARD  
" Programmation linéaire " , vol. 1 : "Fondements"  
Dunod Paris (1972)
- 14 P. WOLFE  
" Algorithm for a least distance programming problem "  
Mathematical Programming Study 1 (1974) 190-205
- 15 P. WOLFE  
" A method of conjugate subgradients for minimizing nondifferentiable functions "  
Mathematical Programming Study 3 (1975) 145-173